Technische Universität Dresden

Fakultät Maschinenwesen

Institut für Luft- und Raumfahrttechnik

Professur für Thermofluiddynamik/Angewandte Aerodynamik

Prof. Dr.-Ing. Roger Grundmann

Flugmechanik

Teil 1 Flugleistung

Teil 2 Flugstabilität und Flugsteuerung

Dieser Studienbrief zur Vorlesung *Aerodynamik/Flugmechanik* basiert überwiegend auf den Kapiteln 6 und 7 des Buches *Introduction to Flight* von John D. Anderson jr.; McGraw-Hill Book Co., 2. Edition, 1985

Teil 1 Flugleistung

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Grundbegriffe, die das Thema *Flugmechanik* beinhaltet, sind:

Flugleistung:

Hier sind Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes eines Flugzeuges von hauptsächlicher Bedeutung. Das Luftfahrzeug wird als Punktmasse betrachtet, Drehbewegungen sind nicht von Interesse. Das Flugzeug ist vier natürlichen Kräften ausgesetzt: Auftrieb,Widerstand, Schub, Gewicht. Es sind keine aerodynamischen Details zu diskutieren, die aerodymischen Eigenschaften des Flugzeuges seien schon vom Aerodynamiker bereitgestellt.

Flugstabilität und Flugsteuerung:

Hierbei sind Rotationsbewegungen des Flugzeuges um eine oder mehrere seiner drei Achsen zu bestimmen.

Aeroelastizität:

Betrifft die Wechselwirkung zwischen dem elastischen Verhalten der Flugzeugzelle und den aerodynamischen Kräften und Momenten. Die Aeroelastizität wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

2 Aerodynamischer Auftrieb und Widerstand

Alle Auftrieb und Widerstand betreffenden Belange eines Tragflügels werden üblicherweise in Form einer *Widerstandspolaren* dargestellt. Die aerodynamischen Eigenschaften sind in diesem Kurvenverlauf nach Gleichung ***(1)*** enthalten.

$$c_D = c_d + \frac{c_L^2}{\pi\ e\ AR} \tag{1}$$

Hierin bedeuten:

c_D Gesamtwiderstandsbeiwert

c_L Auftriebsbeiwert

c_d Profilwiderstandsbeiwert (parasitärer Widerstand)

e Oswald-Effizienzfaktor

$e = 1$	für elliptischen Flügelgrundriß
$e = 0.85–0.95$	für andere übliche Unterschallflügelgeometrien

AR Flügelstreckung

$AR = b^2/S$

b	Spannweite
S	Tragflächeninhalt

Der Profilwiderstand besteht aus zwei Anteilen, einem aufgrund von Wandreibung und einem aufgrund von Druckverlust durch Ablösung. Wenn die Fluggeschwindigkeit den schallnahen (transsonischen) oder gar Überschallbereich (supersonischen) erreicht, ist ein dritter Anteil für Wellenwiderstand hinzuzufügen. Hinter schrägen Stoßwellen (Machscher Kegel) ist der Druck höher als vor dem Stoß. Der Druck steht senkrecht auf der Kegeloberfläche und verursacht Kräfte entgegengesetzt zur Flugrichtung.

$$c_d = c_{d,f} + c_{d,p} + c_{d,w} \qquad \textbf{\textit{(2)}}$$

Hierin bedeuten:

$c_{d,f}$	Wandreibungswiderstandsbeiwert
$c_{d,p}$	Druckwiderstandsbeiwert
$c_{d,w}$	Wellenwiderstandsbeiwert

Die Polare des gesamten Flugzeuges lautet:

$$c_D = c_{D,0} + c_{D,i} = c_{D,0} + \frac{c_L^2}{\pi\, e\, AR} \qquad \textbf{\textit{(3)}}$$

Hierin bedeuten:

$c_{D,0}$	Beiwert für parasitären Widerstand bei Anstellwinkel $\alpha_L = 0$
$c_{D,i} = c_L^2/\pi\, eAR$	Beiwert für auftriebsinduzierten Widerstand

Die Gleichungen ***(1)*** und ***(3)*** unterscheiden sich im wesentlichen dadurch, daß

- der Widerstand nunmehr auf den kompletten Flügel, Leitwerk, Triebwerksgondeln, Fahrwerk und sämtliche weiteren Anbauteile ausgedehnt wird,

- in Schallnähe oder bei Überschall enthält $c_{D,0}$ auch den Wellenwiderstand. Zudem beeinflußt Ablösung auf Gebieten der Oberfläche das Strömungsfeld in Abhängigkeit vom Anstellwinkel, so daß der parasitäre Widerstand vom Auftrieb abhängt. Daher muß der Effizienzfaktor e derart umdefiniert werden, daß der auftreibsabhängige Teil des parasitären Widerstandes im letzten Term von ***(3)*** aufgeht.

Man erhält die Parameter für diese Darstellung durch eine Approximation von im Windkanal ermittelten Polaren. Hier ist die quadratische Form der Gleichungen ***(1)*** und ***(3)*** erkennbar.

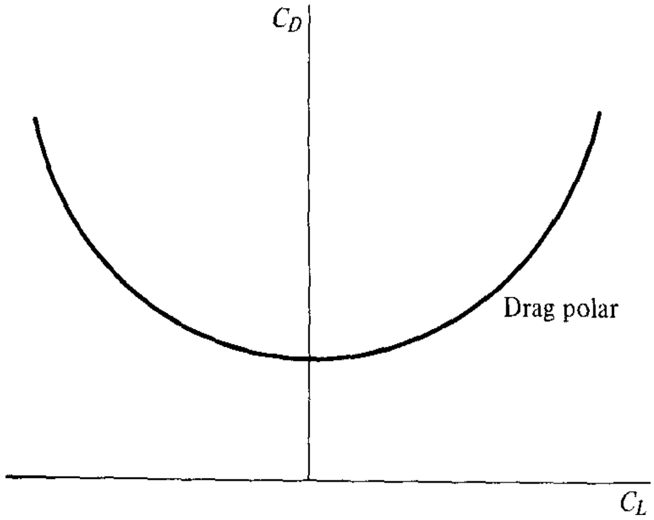

Abb.1 Widerstandspolare

3 Bewegungsgleichungen

Der Flugpfad ist die Bewegungsrichtung des Flugzeuges und liegt somit auf einer Linie mit der ungestörten Anströmung. Mit der Horizontalen schließen beide den Steigwinkel Θ ein. Die Hauptprofillinie ist zum Flugpfad um den geometrischen Anstellwinkel α geneigt.

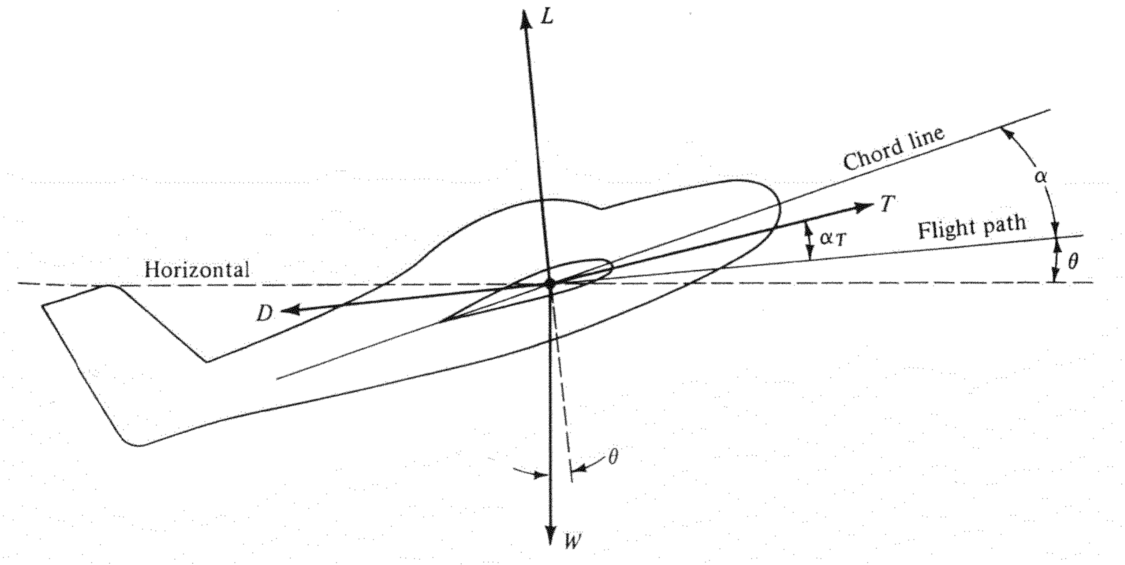

Abb.2 Kräfte an einem Flugzeug während des Fluges

Auf das Flugzeug wirken vier Kräfte:

- *L* Auftrieb, definitionsgemäß senkrecht zum Flugpfad
- *D* Widerstand, parallel zum Flugpfad in entgegengesetzter Richtung
- *W* Gewicht, in Richtung Erdmittelpunkt (im Winkel Θ zum Auftrieb)
- *T* Schub, im allgemeinen um den Schubeinstellwinkel σ zum Flugpfad angestell

Der Flugpfad ist in der Realität immer eine gekrümmte Linie, auch im *horizontalen Geradeausflug*. Der Kurvenradius entspricht dann der absoluten Flughöhe $h_a = h_G + r$ mit der geometrischen Flughöhe h_G über dem Erdradius r.

Der Weg entlang einer gekrümmten Linie wird kurvilinear und der entlang einer Geraden rektilinear genannt. Wendet man das zweite Newtonsche Axiom auf die kurvilineare Bewegung eines Objektes den Flugpfad entlang an, so ergibt das:

$$\sum F_{\mathrm{II}} = ma = m\frac{dV}{dt} \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

dabei seien ΣF_{II} die Summe aller Kräfte parallel zum Flugpfad, $a = dV/dt$ die Bahnbeschleunigung in Flugpfadrichtung und V die momentane Bahngeschwindigkeit, definitionsgemäß immer in Flugpfadrichtung. Newton orthogonal zum Flugpfad:

$$\sum F_{\perp} = m\frac{V^2}{r_c} \qquad \textbf{\textit{(5)}}$$

wobei $\Sigma F_{\perp}$ die Summe aller Kräfte normal zum Flugpfad und V^2/r_c die Radialbeschleunigung auf der Flugbahn mit dem Krümmungsradius r_c sind.

Aus ***Abb. 2*** können die Kräfte in Flugpfadrichtung (nach rechts positiv) entnommen werden:

$$\sum F_{\mathrm{II}} = T\cos\alpha_T - D - W\sin\Theta \qquad \textbf{\textit{(6)}}$$

die Kräfte normal zum Flugpfad und nach oben positiv:

$$\sum F_{\perp} = L + T\sin\alpha_T - W\cos\Theta \qquad \textbf{\textit{(7)}}$$

Faßt man nun die Gleichungen ***(4)*** und ***(6)*** sowie ***(5)*** und ***(7)*** zusammen, so ergibt das:

$$T\cos\alpha_T - D - W\sin\Theta = m\frac{dV}{dt} \qquad \textbf{\textit{(8)}}$$

$$L + T\sin\alpha_T - W\cos\Theta = m\frac{V^2}{r_c} \qquad \textbf{\textit{(9)}}$$

Die Bewegungsgleichungen ***(8)*** und ***(9)*** gelten für ein Flugzeug im zweidimensionalen, beschleunigten translatorischen Flug.

Flugleistungen, die im unbeschleunigten Flug geflogen werden, sind *statische Flugleistungen*. Sie drücken sich aus in:

- Höchstgeschwindigkeit
- Steiggeschwindigkeit
- Gipfelhöhe
- Reichweite
- erforderlicher Schub für Horizontalflug

Im unbeschleunigten Horizontalflug, d.h. Steigwinkel $\Theta = 0$, reduzieren sich die Bewegungsgleichungen auf:

$$T \cos \alpha_T = D \qquad \textbf{(10)}$$

$$L + T \sin \alpha_T = W \qquad \textbf{(11)}$$

Bei den meisten konventionellen Flugzeugen ist der Schubeinstellwinkel α_T klein genug, so daß $\cos \alpha_T \approx 1$ und $\sin \alpha_T \approx 0$ gilt. Dieses liefert also dann:

$$T = D \qquad \textbf{(12)}$$

$$L = W \qquad \textbf{(13)}$$

(12) und ***(13)*** beschreiben die Bewegung des unbeschleunigten Horizontalfluges. Dabei wirkt der Schub in Flugpfadrichtung. In beiden Fällen gleichen sich jeweils Schub und Widerstand sowie Auftrieb und Gewicht aus.

4 Erforderlicher Schub für unbeschleunigten Horizontalflug

Ein Flugzeug befinde sich im Geradeausflug mit gegebener Geschwindigkeit in gegebener Höhe. Das Triebwerk hat einen Nettoschub bereitzustellen, der dem Widerstand gleich ist. Es gilt die Definition:

$$D = q_\infty S \, c_D \tag{14}$$

Hierin bedeuten:

q_∞	dynamischer Druck
S	Flügelfläche
c_D	Gesamtwiderstandsbeiwert nach ***(3)***

$$q_\infty = \frac{\rho_\infty}{2} V_\infty^2 \tag{15}$$

Hierin bedeuten:

ρ_∞	Luftdichte in Flughöhe
V_∞	Fluggeschwindigkeit

Der Schub von ***(12)*** wird mit ***(14)***:

$$T = D = q_\infty S \, c_D \tag{16}$$

Der Auftrieb in ***(13)*** ist definiert als:

$$L = q_\infty S \, c_L \tag{17}$$

Hierin bedeutet:

c_L Auftriebsbeiwert

Die Kombination aus ***(13)*** und ***(17)*** ergibt:

$$L = W = q_\infty S \, c_L \qquad \textbf{\textit{(18)}}$$

Division von ***(16)*** und ***(18)*** liefert:

$$\frac{T}{W} = \frac{c_D}{c_L} \qquad \textbf{\textit{(19)}}$$

Damit ist der Schub, den ein Flugzeug benötigt, um Geschwindigkeit und Höhe zu halten:

$$T_R = \frac{W}{c_L / c_D} = \frac{W}{L / D} \qquad \textbf{\textit{(20)}}$$

Aus ***(20)*** resultiert die Kurve für den *erforderlichen Schub*. Dieser variiert für ein gegebenes Flugzeug in gegebener Höhe mit der Geschwindigkeit V_∞. Die Berechnung kann nach folgendem Schema ablaufen:

- Geschwindigkeit V_∞ auswählen,
- für V_∞ nach ***(18)*** den Auftriebsbeiwert berechnen, wobei ρ_∞ aus der gegebenen Höhe und S aus den Flugzeugdaten bekannt sind. c_L hat dann den Wert, um das bekannte Fluggewicht zu tragen.
- Beiwert c_D aus der Widerstandspolaren ***(3)*** ermitteln, Verhältnis c_L / c_D bilden,
- T_R mittels ***(20)*** berechnen.

Abb. 3 zeigt die Kurve für den erforderlichen Schub über der Geschwindgkeit für ein propellergetriebenes Flugzeug.

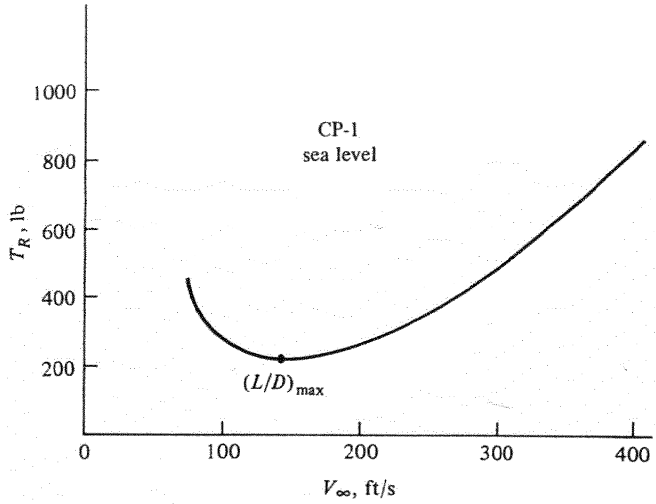

Abb.3 Erforderlicher Schub abhängig von der Fluggeschwindigkeit

Entsprechend ***(20)*** verhalten sich T_R und *L/D* umgekehrt proportional, so daß bei der Geschwindigkeit, bei der *L/D* maximal wird, ein minimaler Schub erforderlich ist. Dann hat das Flugzeug seine optimale Effizienz. Die Strömung sollte anliegen, keine Ablösung darf auftreten.

Weiterhin hängen Auftrieb und Widerstand vom Anstellwinkel α ab. Es ist leicht nachvollziehbar, daß beide – zumindest, solange die Strömung anliegt – mit dem Anstellwinkel zunehme. Da sie über die Widerstandspolare gekoppelt sind, zeigt auch das Verhältnis *L/D* einen charakteristischen Verlauf. Seinen Maximalwert hat es für konventionelle Unterschallflugzeuge bei $\alpha = 2°...5°$. Wenn ein Flugzeug mit Geschwindigkeit V_∞ für minimalen Schub fliegt, so wird es den Anstellwinkel α für maximales *L/D* haben. Weiterhin ist es offensichtlich, daß verschiedene Punkte auf der Kurve ***Abb. 4*** verschiedenen Anstellwinkeln zuzuordnen sind.

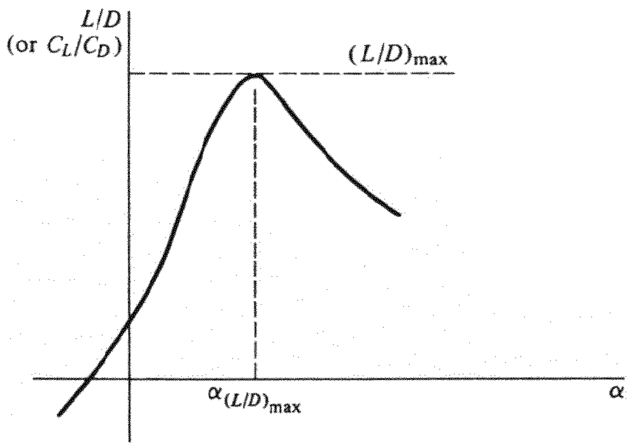

Abb.4 Auftrieb und Widerstand über dem Anstellwinkel

Bei hohen Geschwindigkeiten treten sehr hohe dynamische Drücke auf *(1/2 ρ V_∞^2)*, wodurch Auftriebsbeiwert und damit Anstellwinkel sehr klein sein können, um das Gewicht zu tragen. Andererseits führt der hohe dynamische Druck zu hohem Widerstand, da das Verhältnis von Auftriebs- und Widerstandsbeiwert infolge des parasitären Widerstandes ungünstig ist (vgl. ***Abb.1***). Da auch die Luftdichte direkt in den dynamischen Druck eingeht, läßt sich dieses Problem durch Aufsuchen großer Flughöhen mit dünner Luft lindern. Bei geringen Geschwindigkeiten hingegen müssen c_L und α sehr groß sein, wodurch der quadratische Einfluß von von c_L auf c_D zum Tragen kommt und der erforderliche Schub wiederum stark ansteigt. Das ist der Grund, warum die Schubkurve (***Abb. 4***) ein Minimum hat.

Dieses Minimum muß auch aus der Diskussion der Gleichungen ***(16)*** und ***(20)*** unter Zuhilfenahme von ***(3)*** gefunden werden können.

$$T_R = D = q_\infty S\, c_D = q_\infty S \left(c_{D,0} + \frac{c_L^2}{\pi\, e\, AR} \right) = q_\infty S\, c_{D,0} + q_\infty S \frac{c_L^2}{\pi\, e\, AR} \qquad \textbf{\textit{(21)}}$$

Damit können auch die Schubanteile zur Überwindung des parasitären und des auftriebsinduzierten Widerstandes unterschieden werden. Mit ***(18)*** folgt:

$$T_R = q_\infty S\, c_{D,0} + \frac{W^2}{q_\infty S\, \pi\, e\, AR} \qquad \textbf{\textit{(22)}}$$

Weiterhin gilt die Ableitung für die folgende Kurvendiskussion:

$$\frac{dT_R}{dq_\infty} = \frac{dT_R}{dV_\infty} \frac{dV_\infty}{dq_\infty} \qquad \textbf{\textit{(23)}}$$

Das Minimum in ***Abb. 2*** tritt für $T_R\, /\, dV_\infty = 0$, also auch $T_R\, /\, dq_\infty = 0$ ein. Die Ableitung von ***(22)*** nach q_∞ und anschließendes Nullsetzen führt zu:

$$\frac{dT_R}{dq_\infty} = 0 = S\, c_{D,0} - \frac{W^2}{q_\infty^2 S\, \pi\, e\, AR} \qquad \textbf{\textit{(24)}}$$

Das Ergebnis lautet dann:

$$c_{D,0} = \frac{W^2}{q_\infty^2 S^2 q_\infty^2 S\, \pi\, e\, AR} \qquad \textbf{\textit{(25)}}$$

Aus den Gleichungen ***(18)*** und ***(25)*** läßt sich die folgende Beziehung für den mindestens erforderlichen Schub herleiten.

$$c_{D,0} = \frac{c_L^2}{\pi \; e \; AR} = c_{D,i} \qquad \textbf{\textit{(26)}}$$

Abb.5 enthält Graphen dafür, welche Anteile des Schubes jeweils für die Überwindung des parasitären bzw. des auftriebsinduzierten Widerstandes aufgewendet werden müssen.

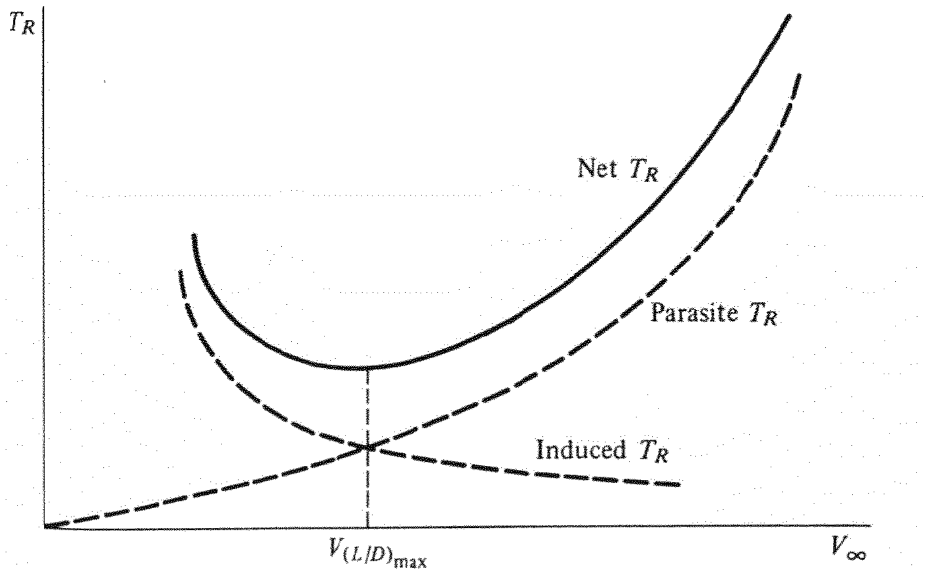

Abb.5 Vergleich von auftriebsinduziertem und parasitärem Widerstand

5 Verfügbarer Schub und Höchstgeschwindigkeit

Der erforderliche Schub wird durch die aerodynamischen Gegebenheiten und das Gewicht des Flugzeuges bestimmt. Er ist ein *zellenbezogenes* Phänomen. Im Gegensatz dazu ist der verfügbare Schub von der Antriebsanlage abhängig.

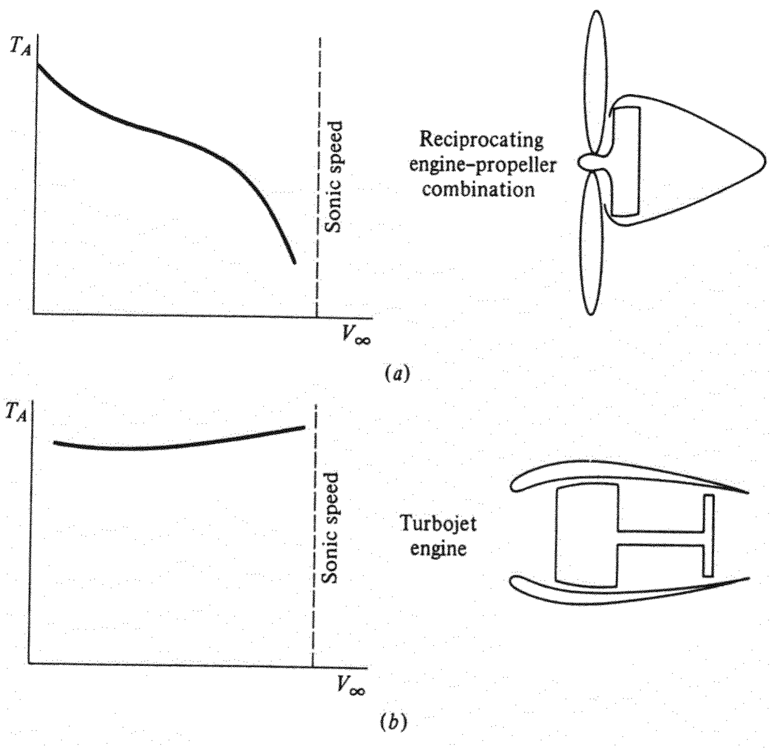

Abb. 6 Verfügbarer Schub von Propeller- und TL-Triebwerk im Verhältnis zur Geschwindigkeit

In ***Abb. 6*** ist der in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit von einem kolbenmotorgetriebenen Propeller und einem Turbinenluftstrahltriebwerk bereitgestellte Schub dargestellt. Im ersten Fall sinkt er mit der Geschwindigkeit. Bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit führen Stöße und Ablösung an den Blattspitzen zu drastischem Schubverlust. Bei Strahltriebwerken hingegen bleibt der Schub nahezu konstant. Das rührt aus der folgenden Beziehung für den Schub her:

$$T_A = \dot{m}\left(V_{out} - V_{in}\right) = \dot{m}\,\Delta V \qquad \textbf{\textit{(27)}}$$

Hierin bedeuten:

$\dot{m}$	Luftmassendurchsatz
V_{out}	Luftaustrittsgeschwindigkeit aus der Antriebsanlage
V_{in}	Lufteintrittsgeschwindigkeit in die Antriebsanlage, V_∞.

Die Differenz der Geschwindigkeiten ΔV ist nahezu konstant, denn eine höhere Eintrittsgeschwindigkeit führt zu einem höheren Gesamtdruck, den das Triebwerk wiederum in eine höhere Austrittsgeschwindigkeit umsetzen kann. Soweit eine sehr vereinfachte Erklärung.

Wenn die Drosselstellung einer Strahlturbine dem für unbeschleunigten Horizontalflug in der gegebenen Höhe benötigten Schub entspricht, so gilt für den verfügbaren Schub $T_A = T_R$. Wird nun Vollgas gegeben, so führt der verfügbare Schub zur Höchstgeschwindigkeit V_{max}, die im Horizontalflug nicht überschritten werden kann. Ihr Wert kann aus der Kurve für den benötigten Schub in ***Abb. 3*** abgelesen werden.

6 Erforderliche Leistung für unbeschleunigten Horizontalflug

Erforderliche und vorhandene Antriebsleistung sind Werte, die wichtiger für die Ermittlung von Steigleistung und Gipfelhöhe sind. Die erforderliche Leistung folgt hierbei den Definitionen aus der Mechanik:

$$P_R = T_R V_\infty \tag{28}$$

Mit Gleichung ***(20)*** läßt sich der Einfluß der Beziehung zwischen Auftrieb und Widerstand einarbeiten.

$$P_R = \frac{W}{(c_L / c_D)} V_\infty \tag{29}$$

Mit Hilfe der Gleichungen ***(15)*** und ***(18)*** läßt sich die Geschwindigkeit ausdrücken als:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2\,W}{\rho_\infty S\, c_L}} \tag{30}$$

und in ***(29)*** eingesetzt ergibt das für die erforderliche Antriebsleistung:

$$P_R = \sqrt{\frac{2\,W^3 c_D^2}{\rho_\infty S\, c_L^3}} = \sqrt{\frac{2\,W^3}{\rho_\infty S}}\,\frac{1}{c_L^{3/2} / c_D} \tag{31}$$

Diese Gleichung ähnelt in der Form der Gleichung für den erforderlichen Schub ***(20)***:

$$T_R = \frac{W}{c_L / c_D} \tag{32}$$

Die erforderliche Leistung verhält sich somit umgekehrt proportional zu $(c_L^{3/2}/c_D)$ und das führt zu einer geringeren Geschwindigkeit für das Leistungsminimum als für das Schubminimum.

$$V_{\min,P_R} < V_{\min,T_R} \tag{33}$$

Ein entsprechender Verlauf ist in ***Abb. 7*** dargestellt.

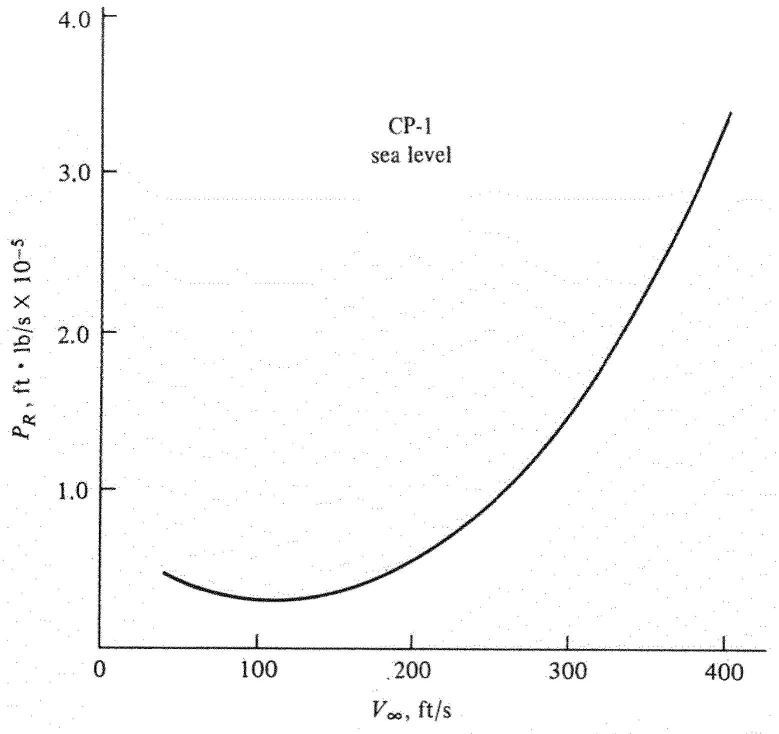

Abb.7 Erforderliche Schubleistung für propellergetriebene Flugzeuge in Abhängigkeit der Geschwindigkeit

In gleicher Weise wie der Schub läßt sich auch die erforderliche Schubleistung in ihre Anteile zur Überwindung des parasitären und des auftriebsinduzierten Widerstandes zerlegen. Das führt zu einer analogen Beziehung für die Widerstandsbeiwerte $c_{D,0}$ und $c_{W,i}$

$$P_R = q_\infty S\, V_\infty c_{D,0} + q_\infty S\, V_\infty \frac{c_L^2}{\pi\, e\, AR} \tag{34}$$

Einarbeiten der Gleichungen ***(15)*** und ***(18)***, Differentiation nach der Geschwindigkeit und anschließendes Nullsetzen $(dP_R \,/\, dV_\infty = 0)$ liefert:

$$\frac{dP_R}{d\,V_\infty} = 0 = \frac{3}{2}\,\rho_\infty\, V_\infty^2\, S \left(c_{D,0} - \frac{1}{3}\, c_{D,i} \right) \tag{35}$$

Somit gilt als aerodynamischer Zustand für minimale Antriebsleistung:

$$c_{D,0} = \frac{1}{3}\, c_{D,i} \tag{36}$$

Abb.8 zeigt einen Vergleich der Anteile der Widerstandsarten an der erforderlichen Antriebsleistung.

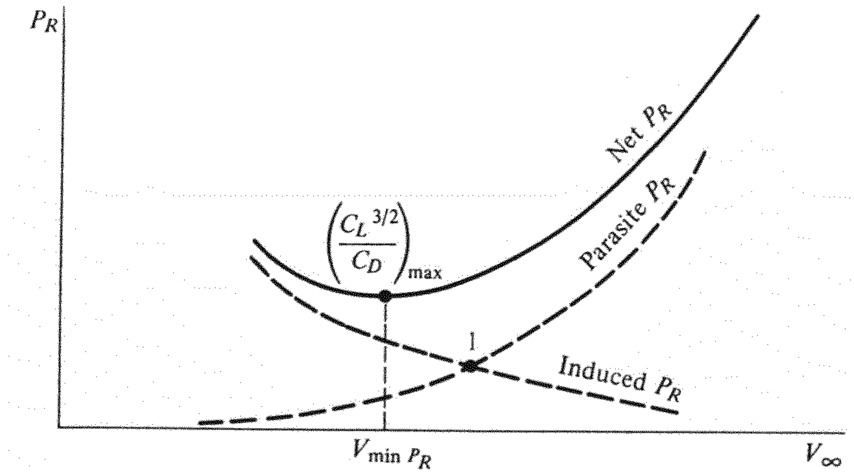

Abb.8 Vergleich der Schubleistungen zur Überwindung des auftriebsinduzierten, des parasitären und des Gesamtwiderstandes.

Weil die Gleichung für die Leistung ***(34)*** lediglich die Gleichung für den Schub ***(21)*** multipliziert mit der Geschwindigkeit darstellt, liefert der Schnittpunkt der Graphen für parasitäre und induzierte Leistung gerade die Geschwindigkeit für den minimalen Schub. Die Tangente durch den Koordinatenursprung tangiert also die Schubleistungskurve bei dieser Geschwindigkeit (siehe ***Abb. 9***).

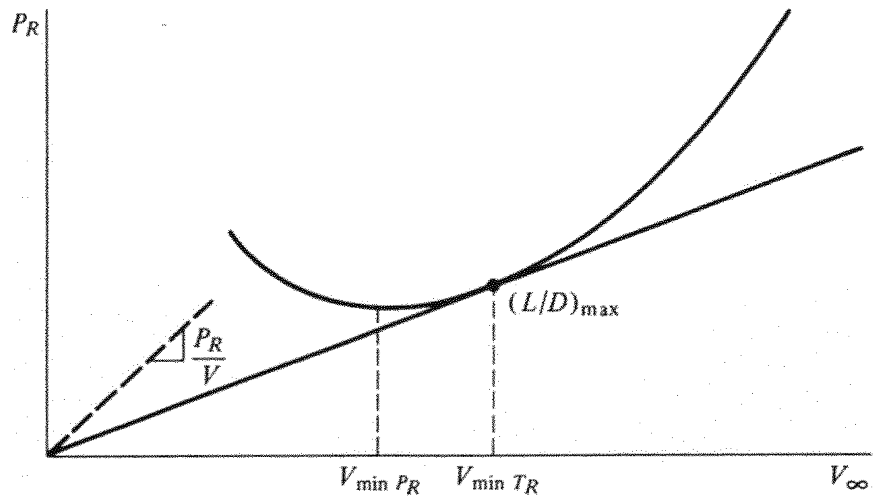

Abb.9 Tangente durch den Ursprung berührt die Schubleistungskurve bei minimalem Schub

Der Anstieg dieser Tangente ist $P_R / V_\infty = T_R$. Es ist leicht einzusehen, daß jede andere Gerade zwischen Ursprung und einem Punkt auf der Schubleistungskurve einen größeren Anstieg hat und damit für diesen Punkt ein höherer Schub erforderlich ist. Es kann leicht bewiesen werden, daß es sich bei der Tangente um den minimalen erforderlichen Schub $T_{R,min}$ handelt und der Berührungspunkt die zugehörige Geschwindigkeit $V_{TR,min}$ markiert:

$$\frac{d\,\frac{P_R}{V_\infty}}{dV_\infty} = \frac{d\,\frac{T_R V_\infty}{V_\infty}}{dV_\infty} = \frac{dT_R}{dV_\infty} = 0 \qquad \textbf{\textit{(37)}}$$

7 Verfügbare Schubleistung und Höchstgeschwindigkeit

Ähnlich dem Schub ist auch die *verfügbare Antriebsleistung* eine Eigenschaft des Antriebes, währenddessen die *erforderliche Leistung* von der aerodynamischen Auslegung und dem Gewicht des Flugzeuges abhängt. Unter der Annahme eines reinen Propellerantriebes ist die verfügbare Schubleistung als Produkt aus Propellerwirkungsgrad η und Wellenbremsleistung P des Flugmotors. Die Wellenleistung kann nicht vollständig in Vortriebsleistung umgesetzt werden, da am Propeller immer aerodynamische Verluste auftreten.

$$P_A = \eta\, P \tag{38}$$

Für Turbinenluftstrahltriebwerke hingegen gilt:

$$P_A = T_A\, V_\infty \tag{39}$$

Abb.10 zeigt typische Verläufe der Vortriebs- oder Schubleistung über der Geschwindigkeit.

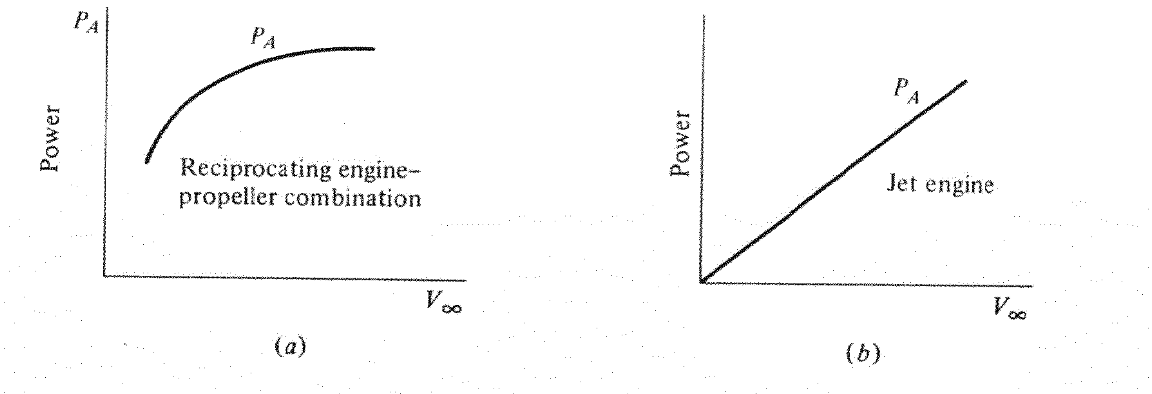

Abb.10 Verfügbare Leistung für Kolbenmotor-Propeller-Antriebe und Luftstrahltriebwerke

Wiederum in Analogie zum Schub kann nun aus den Schnittpunkten für erforderliche und verfügbare Leistung die Höchstgeschwindigkeit für den Horizontalflug abgelesen werden.

8 Höheneinfluß auf verfügbare und erforderliche Schubleistung

Für von Meereshöhe abweichende Flughöhen verschieben sich die Kurven für die benötigte Leistung aufgrund der mit zunehmender Höhe geringer werdenden Luftdichte. Um die entsprechenden Verläufe darstellen zu können, müssen die Gleichungen ***(30)*** und ***(31)*** herangezogen werden:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\,W}{\rho_0 S\, c_L}}$$

(40)

$$P_{R,0} = \sqrt{\frac{2W^3 c_D^2}{\rho_0 S\, c_L}}$$

Der Index *„0“* steht dabei für Meereshöhe bzw. für eine willkürliche Bezugshöhe und wird im folgenden durch *„H“* für beliebige Flughöhen ersetzt.

$$V_H = \sqrt{\frac{2\,W}{\rho_H S\, c_L}}$$

(41)

$$P_{R,H} = \sqrt{\frac{2\,W^3 c_D^2}{\rho_H S\, c_L}}$$

Die Gleichungen ***(40)*** werden durch die Gleichungen ***(41)*** dividiert, woraus zwei Verhältnisgleichungen entstehen.

$$V_H = V_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}} \qquad \textbf{\textit{(42a)}}$$

$$P_{R,H} = P_{R,0}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_H}} \qquad \textbf{\textit{(42b)}}$$

Bei dieser Berechnung sollen die Beiwerte für Auftrieb und Widerstand als konstant angesehen werden. Im Allgemeinen schwanken sie mit der Flughöhe. Wenn die in Meereshöhe erforderliche Leistung bekannt ist, so kann sie für beliebige Höhen mit bekannter Luftdichte aus ***(42b)*** bestimmt werden.

Um den Höheneinfluß besser abschätzen zu können, wurde die *Internationale Standardatmosphäre* eingeführt, die den etwaigen Verlauf von Druck und Temperatur in einem Höhenintervall von *0* bis *11 km* angibt, woraus auch die jeweilige Luftdichte ermittelt werden kann. Sie geht von einem linearen Temperaturabfall von *6.5 K/km* Höhe bei *15 °C* und *101.325 kPa* am Boden aus:

$$T(h) = T_0 + \frac{dT}{dh}\,h \qquad \textbf{\textit{(43)}}$$

mit

$$T_0 = 288.15\,K \qquad\qquad \frac{dT}{dh} = -6.5\,\frac{K}{km}$$

$$p(h) = p_0\left(\frac{T(h)}{T_0}\right)^{5.26} \qquad \textbf{\textit{(44)}}$$

mit

$$p_0 = 101.325\,kPa$$

woraus über die Zustandsgleichung idealer Gase auf die Dichte geschlossen werden kann.

$$p\,V = m\,R\,T \qquad\qquad \rho = \frac{p}{R\,T} \qquad \textbf{\textit{(45)}}$$

mit

$$p = p(h) \qquad\qquad T = T(h) \qquad\qquad R = 0.287\,\frac{kJ}{kgK}$$

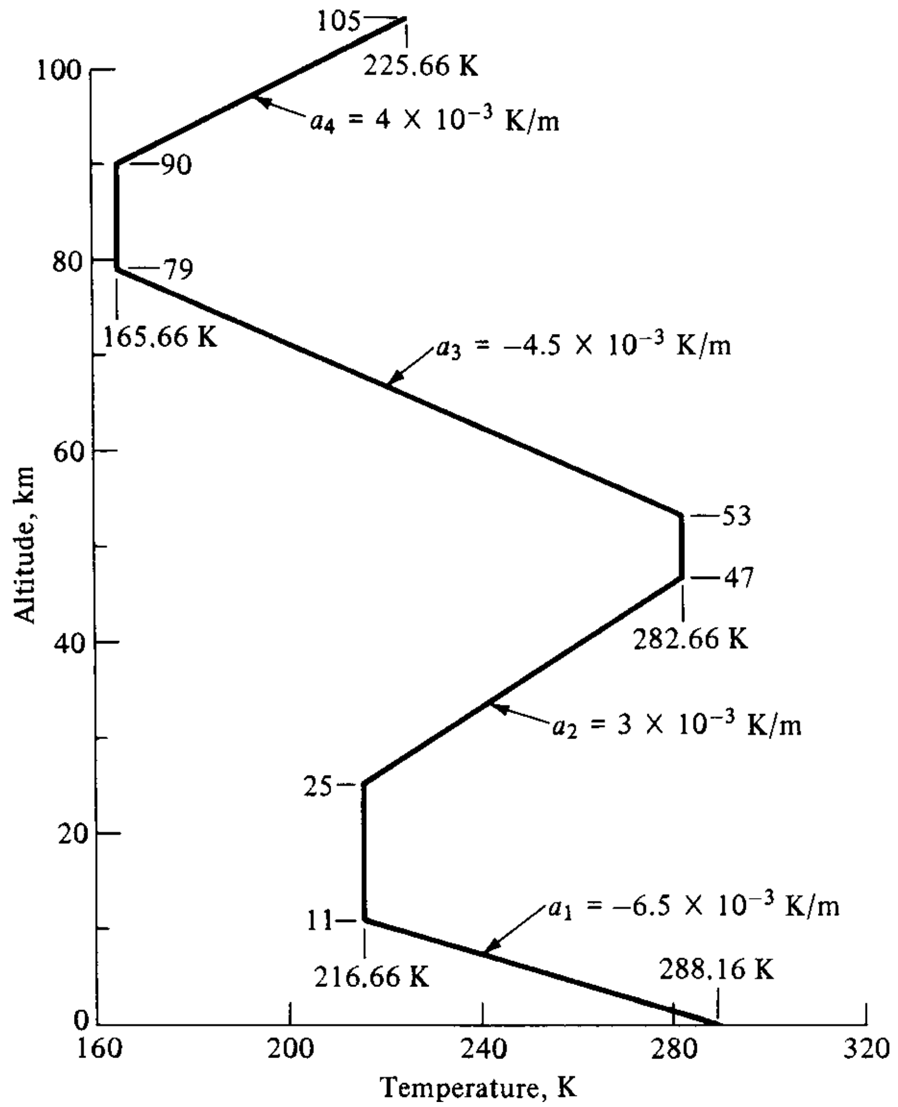

Abb.11 Höheneinfluß auf Temperatur, Druck und Luftdichte der unteren Atmosphäre

Weiterhin bewirkt die geringere Luftdichte auch eine geringere Antriebsleistung, was zumindest in sehr großen Höhen wieder zu einer Verringerung der Höchstgeschwindigkeit führt. Trägt man die Kurvenscharen für einen entsprechend großen Höhenbereich in das *P-V*-Diagramm ein, so kann man die absolute Höchstgeschwindigkeit mit der zugehörigen Flughöhe ermitteln. ***Abb.12*** gibt einen Eindruck davon.

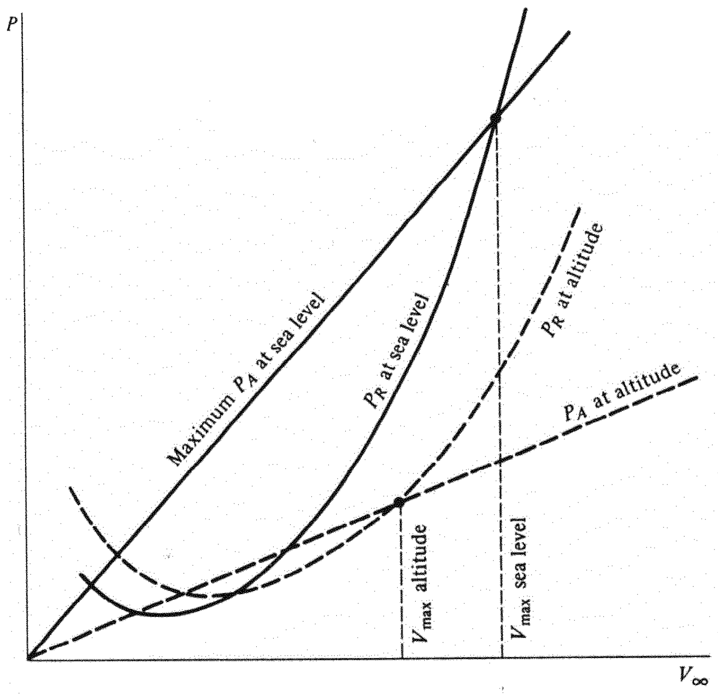

Abb.12 Höheneinfluß auf erforderliche und verfügbare Schubleistung sowie Höchstgeschwindigkeit für strahlgetriebene Flugzeuge

Außerdem erlaubt ein unter Umständen vorhandener weiterer Schnittpunkt links des Minimums die Ermittlung einer Mindestgeschwindigkeit, unterhalb der das Triebwerk nicht mehr in der Lage ist, das Flugzeug in seiner Höhe zu halten. Dieser Punkt existiert oft erst ab gewissen Flughöhen, in Bodennähe kommt es vorher zum Überziehen, was aerodynamisch als Strömungsablösung zu verstehen ist ***(Abb.13)***.

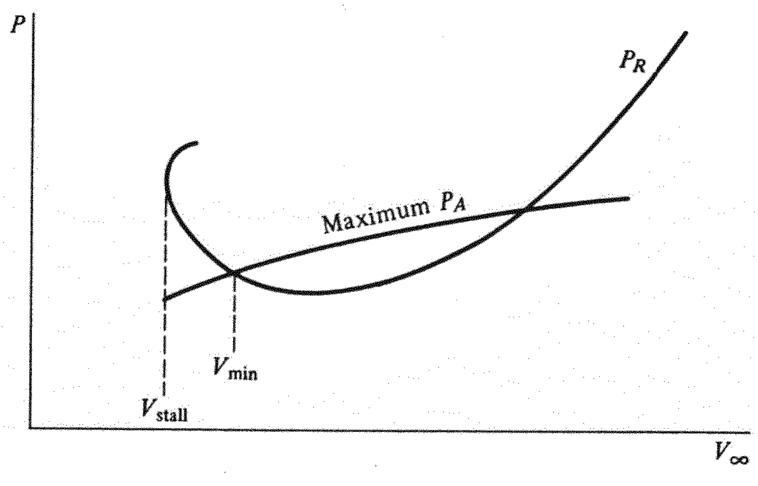

Abb.13 Minimalgeschwindigkeit in der Höhe

9 Steigleistung

Ein Flugzeug befinde sich im gleichmäßigen, unbeschleunigten Steigflug entsprechend ***Abb.14***.

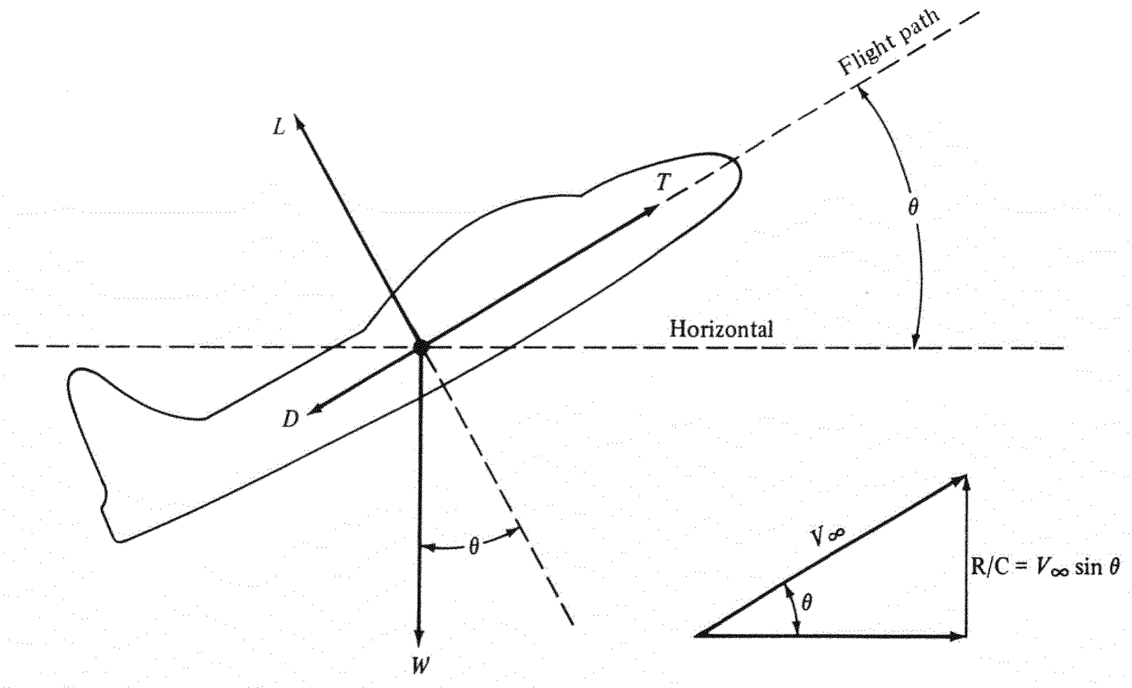

Abb.14 Flugzeug im Steigflug

Die Geschwindigkeit in Flugpfadrichtung, und damit der Flugpfad selbst, seien um den Steigwinkel θ zur Horizontalen angestellt. Wie immer sind Auftrieb und Widerstand senkrecht bzw. parallel zum Flugpfad. Der Schub ist parallel zum Flugpfad angesetzt. Das Gewicht jedoch steht normal zur Horizontalen. Damit muß der Schub nun nicht mehr nur den Widerstand kompensieren, sondern zum Steigen auch einen Teil des Gewichtes mittragen. In Flugpfadrichtung gilt jetzt folgendes Gleichgewicht nach Gleichung ***(8)***:

$$T = D + W \cdot \sin\Theta \qquad \textbf{\textit{(46)}}$$

sowie senkrecht dazu nach Gleichung ***(9)***:

$$L = W \cdot \cos\Theta \qquad \textbf{\textit{(47)}}$$

Das sind die Bewegungsgleichungen für den unbeschleunigten Steigflug. Multipliziert man ***(46)*** mit der Fluggeschwindigkeit V_∞, so folgt nach weiteren Umstellungen:

$$\frac{T\,V_\infty - D\,V_\infty}{W} = V_\infty \sin\Theta = R/C \tag{48}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die vertikale Geschwindigkeit *R/C* („Rate of climb") in ***Abb.14***, die Steigleistung oder -geschwindigkeit. Auf der linken Seite stellt der erste Term $T\,V_\infty$ die verfügbare Leistung gemäß der Gleichungen ***(38)*** und ***(39)*** dar, währenddessen $D\,V_\infty$ die zur Überwindung des Luftwiderstandes im Horizontalflug benötigte Leistung nach Gleichung ***(21)*** verkörpert. Die Differenz dieser beiden Terme ergibt die zum Steigen *verfügbare Überschußleistung*.

$$T\,V_\infty - D\,V_\infty \equiv \textit{Überschußleistung} \tag{49}$$

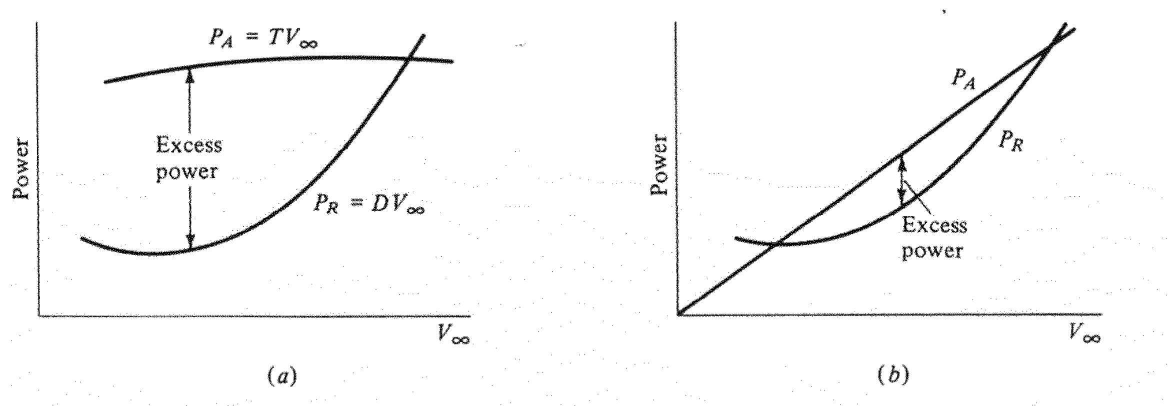

Abb.15 Darstellung der Überschußleistung für *(a)* propeller- sowie *(b)* strahlgetriebene Flugzeuge

Es ist nun leicht einzusehen, daß die Steigleistung bei der Geschwindigkeit am größten ist, wo auch die Überschußleistung ihr Maximum hat.

Abb.16 zeigt den Verlauf der Steigleistung über der Geschwindigkeit, die der jeweiligen Überschußleistung proportional ist in gegebener Flughöhe und für konstante Flugzeugmasse.

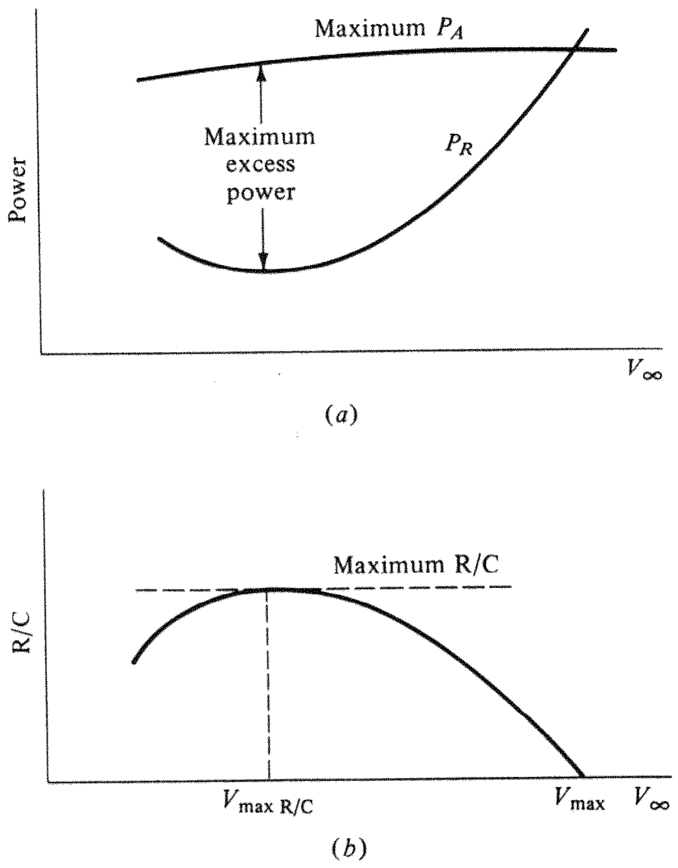

Abb.16 Bestimmung der maximalen Steigleistung

Die horizontale Tangente markiert nun die maximale Steigleistung $V_{max,R/C}$, die selbstverständlich unterhalb der Höchstgeschwindigkeit V_{max} liegt. Da im Steigflug eine Komponente des Gewichtes durch den Schub getragen wird ***(46)***, beeinflußt der sich dann gemäß ***(47)*** verringernde Auftrieb über die Beziehung für die Gleitzahl c_L/c_D auch den Widerstand und somit erhöht sich die Überschußleistung. Dieser Effekt kann jedoch für Steigwinkel θ bis etwa $20°$ vernachlässigt werden, da dann $\cos\,\theta \approx 1$ gilt.

Eine weitere hilfreiche Konstruktion ist der Hodograph (***Abb.17***), bei dem die vertikale Geschwindigkeit V_H über der horizontalen V_V in einem Diagramm aufgetragen wird. Die horizontale Tangente an die Kurve liefert wiederum die maximale Steigleistung $(R/C)_{max}$, währenddessen jede Gerade vom Ursprung zu einem Punkt auf dem Graphen durch ihren Anstieg V_V/V_H den Steigwinkel liefert. Die Länge der Verbindungslinie entspricht dann der Fluggeschwindigkeit. Die Tangente durch den Ursprung an den Graphen liefert nun den maximalen Steigwinkel θ_{max}, der bemerkenswerterweise nicht im gleichen Betriebspunkt wie maximale Steigleistung auftritt.

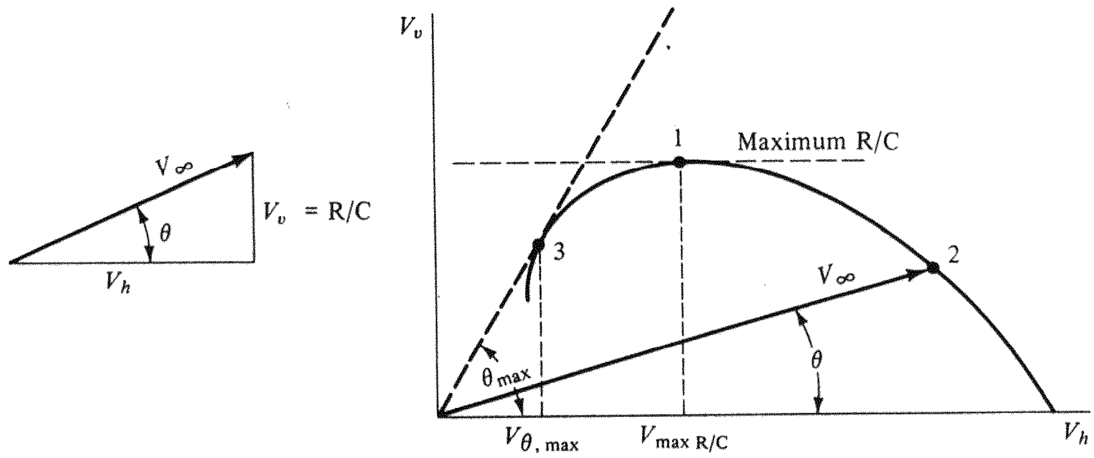

Abb.17 Hodograph für Steigflug

10 Absolute und Dienstgipfelhöhe

Da mit steigender Flughöhe sowohl die verfügbare Leistung abnehmen als auch die erforderliche zunehmen, sinken die Überschuß- sowie die Steigleistung $(R/C)_{max}$ (***Abb.12***, ***18, 19*** und ***20***) bis die Kurve der maximal verfügbaren Leistung eine Tangente an die der erforderlichen Leistung wird.

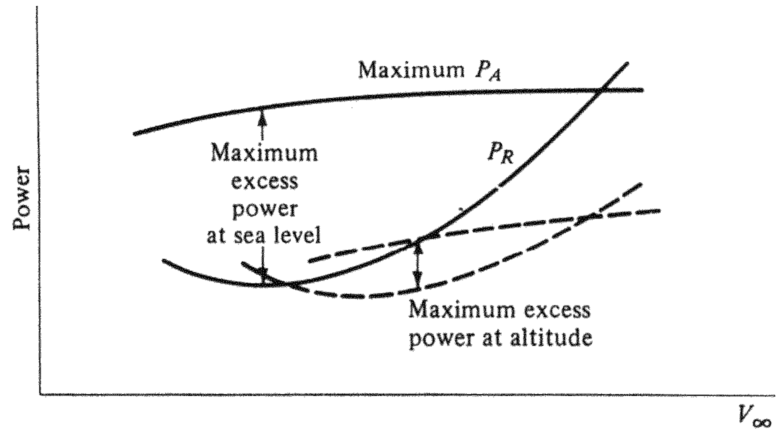

Abb.18 Höheneinfluß auf Überschußleistung

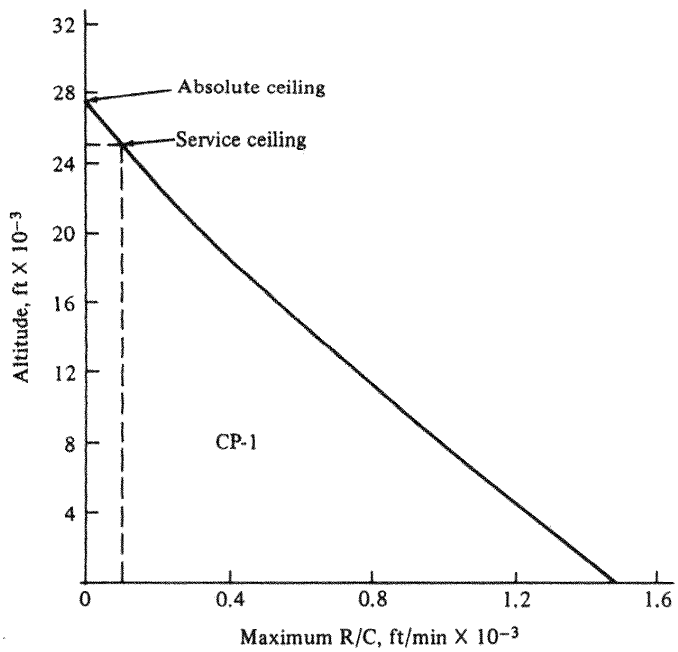

Abb.19 Bestimmung der absoluten Gipfelhöhe und Dienstgipfelhöhe

Die dazugehörige Geschwindigkeit markiert den einzigen Betriebszustand, der einen Horizontalflug in dieser Höhe ermöglicht. Weil nun keine Überschußleistung mehr verfügbar ist, kann das Flugzeug auch nicht weiter steigen. Diese Flughöhe wird *absolute Gipfelhöhe* genannt. Ein praktikablerer Wert ist die *Dienstgipfelhöhe*, in der als Richtwert noch maximal *0.5 m/s* Steigen erreicht werden, so daß noch ein sicherer Horizontalflug gewährleistet ist.

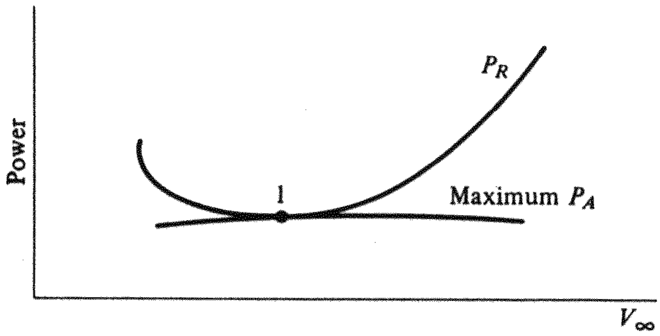

Abb.20 Höheneinfluß auf verfügbare und erforderliche Leistung

11 Steigzeit

Geschwindigkeit ist die Änderung einer Koordinate in diesem Fall der Höhe pro Zeiteinheit.

$$R/C = \frac{dh}{dt} \tag{50}$$

woraus folgt

$$dt = \frac{dh}{R/C} \tag{51}$$

Diese Gleichung muß noch über die Flughöhe integriert werden, um die Steigzeit zu erhalten.

$$t = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{R/C} \tag{52}$$

Um die Steigzeit konkret zu ermitteln, kann man beispielsweise *(R/C)*$^{-1}$ über der Höhe *h* auftragen und die Fläche unter der Kurve bestimmen (***Abb.21***).

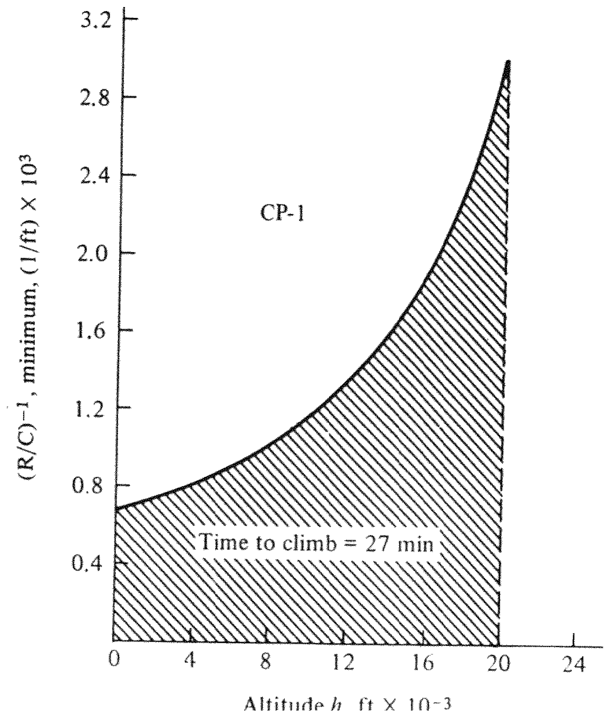

Abb.21 Steigzeitbestimmung für ein Propellerflugzeug

12 Reichweite und Flugdauer

Die *Reichweite* eines Flugzeuges ist Definition die Strecke über Grund, die es mit einer Tankfüllung zurücklegen kann, währenddessen seine Flugdauer die Zeit ist, die es sich mit einer Tankfüllung in der Luft halten kann.

Der *spezifische Kraftstoffverbrauch* b_F ist die Treibstoffmasse, die pro Zeit- und Schubeinheit verbraucht wird.

$$b_F = \frac{kg_{Treibstoff}}{kN_{Schub} h} \tag{53}$$

Physikalische Betrachtungen:

Die maximale Flugdauer tritt in dem Flugzustand auf, bei dem der totale Kraftstofffluß minimal wird:

$$\dot{m}_{Treibstoff} = \frac{kg_{Treibstoff}}{h} = b_F \cdot T_A \tag{54}$$

Unter der Annahme, daß der spezifische Kraftstoffverbrauch nicht geschwindigkeitsabhängig also der Gesamtwirkungsgrad geschwindigkeitsproportional ist, hat ein Strahlflugzeug seine maximale Flugdauer bei der Geschwindigkeit, bei der der erforderliche Schub T_A minimal wird (***Abb. 22***), entsprechend dem Maximum für c_l/c_D ***(20)***.

Maximale Reichweite hingegen fordert minimalen Kraftstoffverbrauch pro geflogener Strecke in *km*:

$$\frac{dm_{Treibstoff}}{ds} = \frac{b_F \ T_R}{V_\infty} \tag{55}$$

Es ist also nach einem Minimum für T_R / V_∞ zu suchen. Zu finden ist es im Anstieg einer Tangente durch den Ursprung an die Schubkurve. Der Flugzustand im Berührungspunkt kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{T_R}{V_\infty} = \frac{D}{V_\infty} = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 \; S \, c_D}{V_\infty} = \rho_\infty V_\infty S \, c_D \tag{56}$$

Mit Gleichung ***(30)***:

$$\frac{T_R}{V_\infty} = \frac{\rho_\infty}{2} S \sqrt{\frac{2W}{\rho_\infty S \, c_L}} \, c_D = \frac{\rho_\infty}{2} S \sqrt{\frac{2W}{\rho_\infty S}} \, \frac{1}{c_L^{1/2} / c_D} \tag{57}$$

Unter oben gemachter Annahme ist die maximale Reichweite eines Strahlflugzeuges einer Geschwindigkeit zugeordnet, bei der das Verhältnis $(c_L^{1/2}/c_D)$ maximal wird.

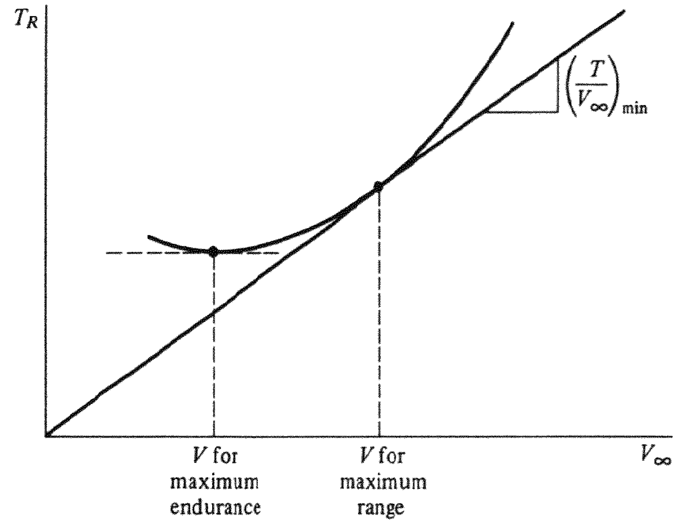

Abb.22 Geschwindigkeiten für maximale Reichweite und Flugdauer

Quantifizierung:

Sei dm die infinitisimale Masseänderung des Flugzeuges infolge Kraftstoffverbrauch c_T während des Zeitintervalles dt ***(58)***, so gilt:

$$\frac{dm}{dt} = -\, b_F \; T_A \tag{58}$$

Auflösen nach dt liefert:

$$dt = -\frac{dm}{b_F T_A} \tag{59}$$

Die Integration über m vom Startmasse m_{TO} zur Landemasse m_L führt zur Flugzeit t_{max} :

$$t_{\max} = -\int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{dm}{b_F T_A} \qquad \textbf{\textit{(60)}}$$

weiterhin Einsetzen von $T_A = T_R = W$ sowie $L = W$:

$$t_{\max} = -\int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{1}{b_F} \frac{L}{D} \frac{dm}{W} \qquad \textbf{\textit{(61)}}$$

Nimmt man dazu die Konstanz von b_f sowie von $c_L/c_D = L/D$ an, so ergibt sich als Lösung:

$$t_{\max} = \frac{1}{b_F} \frac{c_A}{c_W} \ln \frac{m_{TO}}{m_L} \qquad \textbf{\textit{(62)}}$$

Somit gelten für maximale Flugdauer folgende Forderungen:

- minimaler spezifischer Kraftstoffverbrauch,
- maximale Treibstoffzuladung *($m_F = m_{TO} - m_L$)*,
- Flug bei günstigstem c_L/c_D.

Bedingt durch die getroffenen Annahmen ist t_{max} nicht von ρ_∞ und damit nicht von der Flughöhe h abhängig.

Um die *Reichweite R* zu ermitteln, muß zunächst die zurückgelegte Flugstrecke definiert werden, indem man ***(59)*** mit der Geschwindigkeit V_∞ multipliziert:

$$ds = V_\infty \; dt = -\frac{V_\infty \; dm}{b_F F_{erf}} \qquad \textbf{\textit{(63)}}$$

Integriert man nun über m von m_{TO} bis m_L so ergibt sich für R:

$$R = \int_0^R ds = -\int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{V_\infty \; dm}{b_F T_A} \qquad \textbf{\textit{(64)}}$$

Mit Gleichung ***(20)*** folgt:

$$R = -\int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{V_\infty}{b_F} \frac{L}{D} \frac{dm}{W} \qquad \textbf{\textit{(65)}}$$

und mit Gleichung ***(30)***:

$$R = \int_{m_{TO}}^{m_L} \sqrt{\frac{2}{\rho_\infty S}} \frac{c_L^{1/2}/c_D}{b_F} \frac{dm}{\sqrt{W}} \qquad \textbf{\textit{(66)}}$$

Nach Einsetzen von konstant angenommenen Größen b_f, c_L, c_D und ρ_∞ für konstante Höhe sowie Windstille ergibt sich schließlich für die Reichweite R:

$$R = 2\sqrt{\frac{2}{\rho_\infty S}} \frac{1}{b_F} \frac{c_L^{1/2}}{c_D} \left(\sqrt{m_{TO}} - \sqrt{m_L}\right) \qquad \textbf{\textit{(67)}}$$

Hieraus folgen als Forderungen:

- minimaler spezifischer Kraftstoffverbrauch,
- maximale Treibstoffzuladung $m_F = m_{TO} - m_L$,
- Flug bei günstigstem $c_L^{1/2}/c_D$,
- Flug in größtmöglicher Höhe.

Man nehme nun an, der spezifische Kraftstoffverbrauch b_F sei der Geschwindigkeit proportional, was einem konstanten Wirkungsgrad entspricht. Diese Annahme gilt nährungsweise für kolbenmotorgetriebene Flugzeuge [Gl.***(38)***; ***Abb.10***], bei denen man den dann etwa konstanten leistungsspezifischen Kraftstoffverbrauch b_P ansetzt, sowie uneingeschränkt für Segelflugzeuge, wenn man die Ausgangshöhe dem Treibstoffvorrat gleichsetzt. Dann gilt:

$$t_{\max} = \int_0^{t_{\max}} dt = -\int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{1}{b_P} \frac{dm}{P_R} = \frac{1}{b_P} \sqrt{\frac{\rho_\infty S\, c_L^3}{2\, g^3 c_D^4}} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{m_L}} - \frac{2}{\sqrt{m_{TO}}} \right) \qquad \textbf{\textit{(68)}}$$

$$R = \int_0^R ds = \int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{V_\infty}{b_P} \frac{dm}{P_R} = \int_{m_{TO}}^{m_L} \frac{1}{b_P} \frac{dm}{T_R} = \frac{1}{b_P} \frac{c_L}{c_D} \ln \frac{m_{TO}}{m_L} \qquad \textbf{\textit{(69)}}$$

Für Segelflugzeug bei kleinen Luftdichteänderungen sowie Windstille:

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \frac{h_{Start}}{-w_{\min}} = \frac{h_{Start}}{W} \sqrt{\frac{\rho_\infty S\, c_L^3}{2\, g^3 c_D^4}} \\ R &= h_{Start} \left(\frac{V_\infty}{-w} \right)_{\max} = h_{start} \frac{1}{-\tan\Theta} = h_{Start} \frac{W}{-W \cdot \tan\Theta} \\ &= h_{Start} \frac{L}{D} = h_{Start} \frac{c_L}{c_D} \end{aligned} \qquad \textbf{\textit{(70)}}$$

Hierin bedeutet:

c_L/c_D - Gleitzahl

Ist die geringste Sinkgeschwindigkeit $(-w_{min})$ klein genug, so kann ein Segelflugzeug bei Aufwind auch steigen.

13 Startvorgang

In den vorangegangenen Kapiteln wurde jeweils steter, unbeschleunigter Flug vorausgesetzt, woraus die Bezeichnung *statische Flugleistungen* hervorgeht. Nunmehr müssen Beschleunigungen einbezogen werden, um Flugzustände wie Starts und Landungen sowie Kurvenflüge betrachten zu können.

Wenn auf einen Körper der Masse m eine konstante äußere Kraft F wirkt, so wird seine Bewegung nach Newton gleichmäßig beschleunigt sein:

$$dV = \frac{F}{m} dt \tag{71}$$

Nun wird folgende Annahme getroffen: der Körper habe zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $s = 0$ die Geschwindigkeit $V = 0$ und werde bis zur Zeit t über den Weg s auf die Geschwindigkeit V gebracht.

$$\int_0^V dV = \frac{F}{m} \int_0^t dt \tag{72}$$

Integration und Auflösung nach der Zeit t führt zu:

$$t = \frac{V\,m}{F} \tag{73}$$

Wenn die Geschwindigkeit V ist, so kann das differentielle Wegelement ds, das während der Zeit dt zurückgelegt wird, beschrieben werden durch:

$$ds = V\,dt = \frac{F}{m} t\,dt \tag{74}$$

Die Integration von ***(74)*** führt über:

$$\int_0^S ds = \frac{F}{m} \int_0^t t\,dt \tag{75}$$

zu:

$$s = \frac{F\,t^2}{2\,m} \tag{76}$$

Substituiert man nun t durch Einsetzen von ***(73)***:

$$s = \frac{V^2\, m}{2\, F} \tag{77}$$

Diese Beziehung liefert die Strecke, die ein Körper der Masse m benötigt, um sich von der konstanten Kraft F aus dem Stand auf die Geschwindigkeit V beschleunigen zu lassen.

In Anbetracht von ***Abb.23*** muß zu den Kräften, die auf das Flugzeug wirken, am Boden noch der Rollwiderstand R des Fahrwerkes – für ein Wasserflugzeug der Stömungswiderstand des Bootskörpers – hinzugezählt werden.

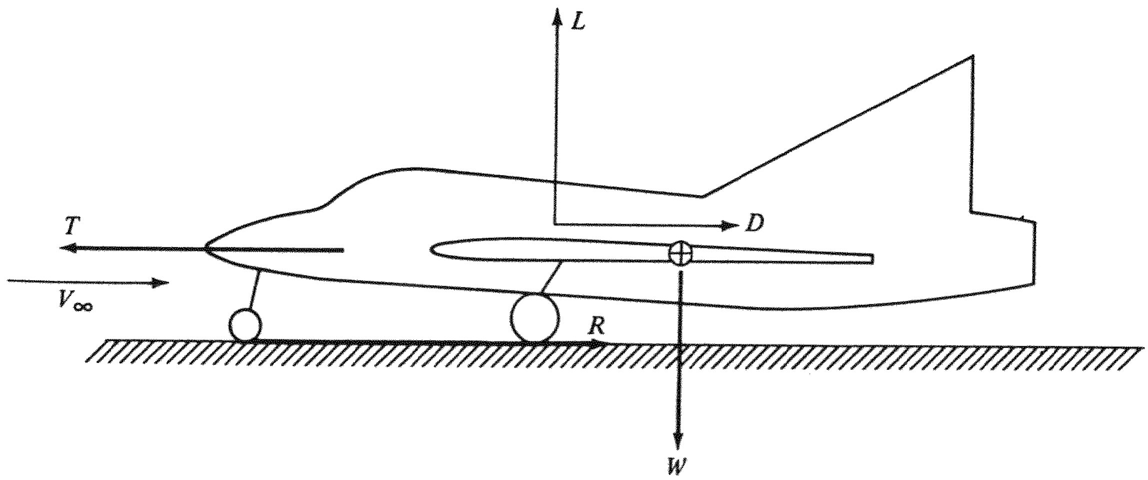

Abb.23 Kräfte auf ein Flugzeug während Start und Landung

Der Rollwiderstand kann nach Coulomb als:

$$R = \mu_R \left(W - L \right) \tag{78}$$

angegeben werden; *(W - L)* ist dabei die Normalkraft zwischen Fahrwerk und Rollbahn sowie μ_R der zugehörige Rollreibungskoeffizient, der je nach Untergrund stark schwanken kann. Die Summation der Kräfte ergibt nun:

$$F = T - D - R = T - D - \mu_R\, (W - L) = m\, \frac{dV}{dt} \tag{79}$$

Der Schub ist während des Rollens weitestgehend konstant, genauso, wie auch die Masse und damit das Gewicht. Nur Auftrieb und Luftwiderstand sind Funktionen des dynamischen Druckes q_∞ und damit der Geschwindigkeit ***(15)***.

Die sich an den Flügelenden ablösenden Wirbelschleppen, die großen Anteil am induzierten Widerstand haben, erzeugen eine starke Abwärtsströmung an der Flügelhinterkante, der in Bodennähe zusätzlichen Auftrieb liefert bzw. im Umkehrschluß zu geringerem induzierten Widerstand führt. McCormack hat daher einen Faktor Φ eingeführt, mit dem der induzierte Widerstandsbeiwert zu multiplizieren ist.

$$\Phi = \frac{\left(16\frac{h}{b}\right)^2}{1+\left(16\frac{h}{b}\right)^2} \qquad \textbf{\textit{(80)}}$$

Hierin bedeuten:

h	Höhe der Flügel über Grund, ein präzisierter Ausdruck für die Flughöhe
b	Spannweite

Dieses Bodeneffekt genannte Phänomen klingt wegen des quadratischen Einflusses mit zunehmender Flughöhe schnell ab, daher ist er nur für Start und Landung bzw. für spezielle sehr niedrig fliegende Luftfahrzeuge von Interesse.

Aufgrund der Vielzahl von Einflüssen entsprechend ***(79)*** ist die Berechnung der Startrollstrecke s_{LO} günstig auf iterativem Wege zu bewerkstelligen. Eine Vorstellung von den Änderungen der während eines typischen Starts auf ein Flugzeug wirkenden Kräfte soll ***Abb.24*** vermitteln.

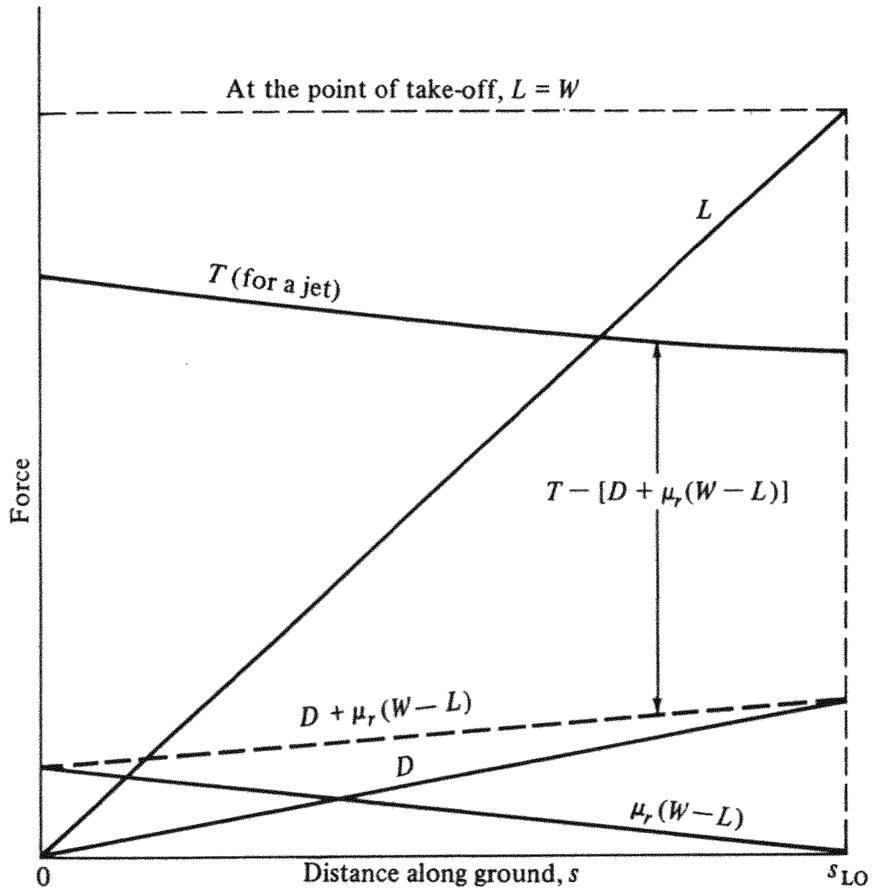

Abb.24 Typische Änderungen der auf ein Flugzeug wirkenden Kräfte entlang der Startrollstrecke

Wenn die Annahme zulässig ist, daß der Schub bis zur Abhebegeschwindigkeit konstant bleibt und man für die Summe der Widerstände ebenfalls einen konstanten Mittelwert setzt, so kann die Startrollstrecke auf eine vereinfachte Weise ermittelt werden, denn es gilt:

$$F_{eff} = T - \left[D + \mu_R \left(W - L \right) \right]_{mittel} = const \qquad \textbf{\textit{(81)}}$$

F_{eff} und die Abhebegeschwindigkeit V_{LO} in Gleichung ***(77)*** eingesetzt ergibt:

$$s_{LO} = \frac{V_{LO}^2 \, m}{2\left\{ T - \left[D + \mu_R \left(W - L \right) \right]_{mittel} \right\}} \qquad \textbf{\textit{(82)}}$$

Um eine gewisse Sicherheit beim Start zu garantieren, setzt man die Abhebegeschwindigkeit V_{LO} meist etwa *20 %* über der Überziehgeschwindigkeit V_{stall} an.

$$V_{LO} = 1.2\, V_{stall} = 1.2 \sqrt{\frac{2\,W}{\rho_\infty S\, c_{L,\max}}} \qquad \textbf{\textit{(83)}}$$

Das ergibt nach Einsetzen von ***(83)*** in ***(82)***

$$s_{LO} = \frac{1.44\,W^2}{g\rho_\infty S\, c_{L,\max}\,\{T - [\,D + \mu_R\,(W - L\,)\,]_{mittel}\}} \tag{84}$$

Für Überschlagsrechnungen kann eine weitere Vereinfachung vorgenommen werden, da der Luft- und der Rollwiderstand recht klein gegenüber dem Schub sind.

$$s_{LO} = \frac{1.44\,W^2}{g\rho_\infty S\, c_{L,\max}\, T} \tag{85}$$

Diese Gleichungen sind folgendermaßen zu interpretieren:

- die Startrollstrecke ist sehr empfindlich auf die Startgewicht (W^2),
- sie hängt weiterhin stark von der Luftdichte ρ_∞ ab, nämlich unter der Annahme, daß der Schub proportional zur Dichte ist, ergibt sich ebenfalls eine quadratische Abhängigkeit $s_{L0} \cong 1/\rho_\infty^2$
- sie kann verringert werden durch Erhöhung der Flügelfläche S, des Auftriebsbeiwertes $c_{L,max}$ durch Hochauftriebsmittel sowie durch Erhöhung des Schubes T.

14 Landevorgang

Nun befinde sich das Flugzeug im Landeanflug. In diesem Fall kann Gleichung ***(79)*** für die Beschleunigungsphase hergezogen werden. Dabei ist zu beachten, daß sich das Vorzeichen von dV/dt umkehrt. Weiterhin soll gelten, daß der Schub mit vom Zeitpunkt des Aufsetzens an den Wert $T = 0$ annimmt.

$$-D - \mu_R\,(W - L) = m\,\frac{dV}{dt} \tag{86}$$

Die Landerollstrecke vom Aufsetzpunkt mit der Landegeschwindigkeit V_T bis zum Stillstand wird mit s_L bezeichnet. Als effektive Verzögerungskraft F_{eff} ergibt sich dann:

$$F_{eff} = -\left[\,D + \mu_R\,(W - L)\right]_{mittel} \tag{87}$$

Nun ist wiederum Gleichung ***(74)*** zu integrieren, vom Aufsetzen, wo $s=0$ und $t=0$, bis zum Anhalten bei $s=s_L$ und $t=t_L$:

$$\int_{s_L}^{0} ds = \frac{F_{eff}}{m}\int_{0}^{t_L} t\,dt \tag{88}$$

oder

$$s_L = -\frac{F_{eff}}{m}\,\frac{t_L^2}{2} \tag{89}$$

Mit $F_{eff} < 0$ wird die Landerollstrecke positiv. Setzt man ***(73)*** in ***(89)*** ein, so erhält man:

$$s_L = -\frac{mV_T^2}{2\,F_{eff}} \tag{90}$$

Substitution von F_{eff} mit ***(87)*** ergibt:

$$s_L = \frac{V_T^2\;m}{2\left[\,D + \mu_R\,(W - L)\right]_{mittel}} \tag{91}$$

Es folgt nach Einführung eines Sicherheitsfaktors für die Landegeschwindigkeit V_T:

$$V_T = 1.3\, V_{stall} = 1.3 \sqrt{\frac{2\, W}{\rho_\infty S\, c_{L,\max}}} \qquad \textbf{\textit{(92)}}$$

und nach Einsetzen von Gleichung ***(91)*** in Gleichung ***(90)*** wird die Landerollstrecke s_L:

$$s_L = \frac{1.69\, W^2}{g \rho_\infty S\, c_{L,\max} \left[D + \mu_R \left(W - L \right) \right]_{mittel}} \qquad \textbf{\textit{(93)}}$$

Zur Minimierung der Landerollstrecke s_L kann μ_R durch den Einsatz von Bremsen bis zur Haftgrenze μ_H erhöht werden, des weiteren ist es möglich, durch Umkehrschub die Triebwerke zum Bremsen heranzuziehen oder den Luftwiderstand durch Ausfahren von Bremsklappen zu vergrößern. Der geschickte Einsatz von Spoilern bewirkt weiterhin eine Auftriebsverringerung, wodurch an den Rädern höhere Bremskräfte übertragen werden können. Eine schematische Darstellung der Kräfte liefert ***Abb.25***.

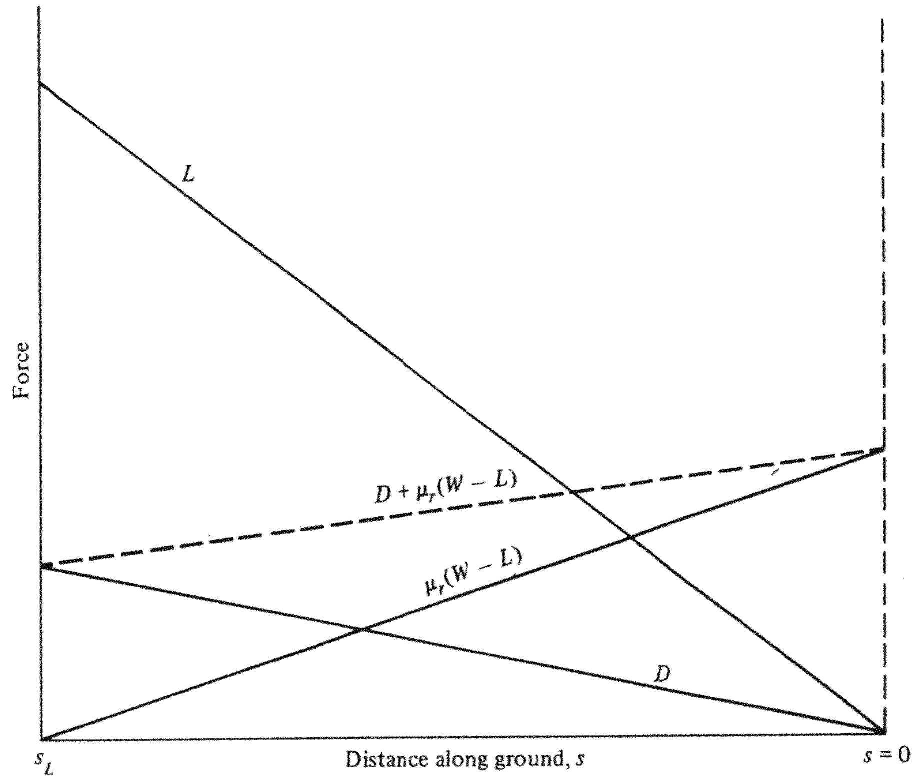

Abb.25 Kräfte auf ein Flugzeug entlang der Landerollstrecke

15 Kurvenflug und v-n-Diagramm

Im folgenden soll der beschleunigte Flug entlang eines gekrümmten Flugpfades – zunächst in der Horizontalen – betrachtet werden. Das Flugzeug habe einen Querneigungswinkel *Φ*, um denselben ist auch der Auftriebsvektor geneigt. Leicht ist daraus das Verhältnis von Auftrieb zu Gewicht zu bestimmen:

$$L \cos\Phi = W \qquad \textbf{\textit{(94)}}$$

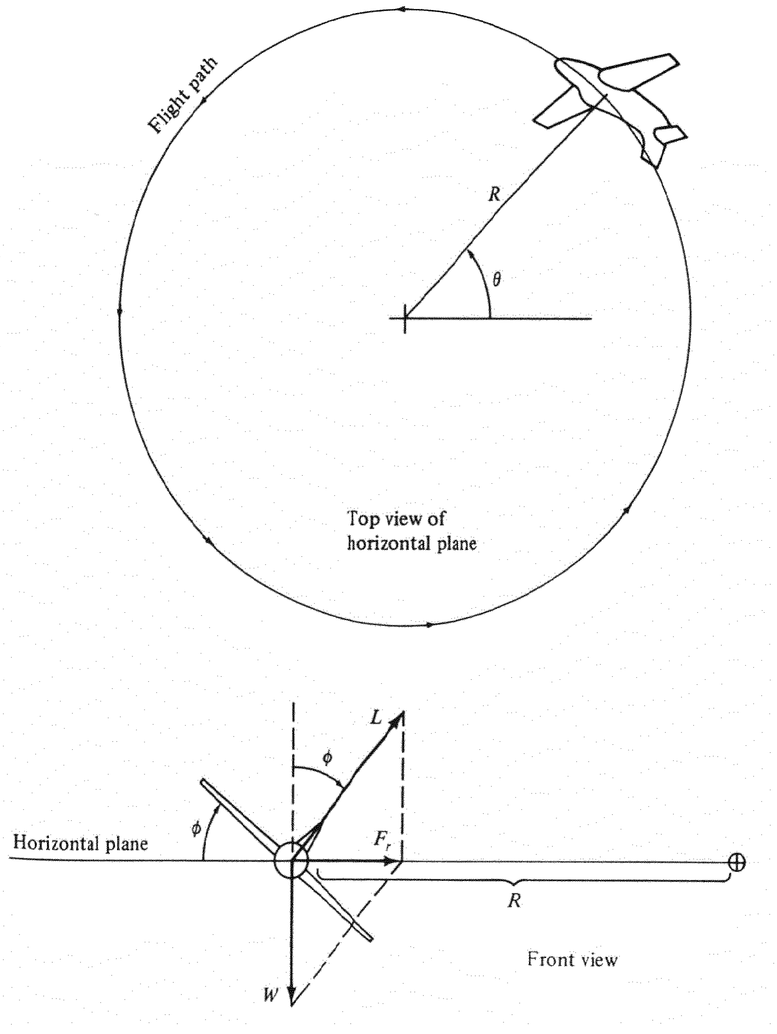

Abb.26 Flugzeug im horizontalen Kurvenflug

Die Resultierende aus Auftrieb und Gewicht ist die Radialkraft F_r, welche in der Horizontalen liegt und senkrecht zum Flugpfad mit dem Kurvenradius *R* steht. Dieser Radius sowie die Winkelgeschwindigkeit $d\theta/dt$ sollen bestimmt werden. Die resultierende Kraft F_r ergibt sich aus:

$$F_r = \sqrt{L^2 - W^2} \tag{95}$$

Weiterhin wird das Lastvielfache *n* eingeführt, üblicherweise angegeben in *g*.

$$n = \frac{L}{W} \tag{96}$$

Damit wird aus Gleichung ***(95)***:

$$F_r = \sqrt{n^2 - 1} \tag{97}$$

Die Radialbeschleunigung liefert Newtons zweites Axiom:

$$F_r = m\frac{V_\infty^2}{R} \qquad\qquad a_r = \frac{V_\infty^2}{R} \tag{98}$$

Gleichsetzen von ***(97)*** und ***(98)*** sowie Auflösen nach *R* ergibt:

$$R = \frac{V_\infty^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} \tag{99}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist die Änderung des Winkels θ während der Zeit *t*.

$$\omega = \frac{d\Theta}{dt} = \frac{V_\infty}{R} = \frac{g\sqrt{n^2 - 1}}{V_\infty} \tag{100}$$

Um eine hohe Manövrierfähigkeit zu gewährleisten ist es vorteilhaft, *R* klein und ω groß zu halten, so daß Kurven in kurzer Zeit und auf engem Raum geflogen werden können. Es ist daher anzustreben:

- größtmögliches Lastvielfaches,
- bei möglichst geringer Geschwindigkeit.

Ein weiteres Beispiel für einen Kurvenflug ist der *„Aufschwung“,* wie er in ***Abb.27*** dargestellt ist.

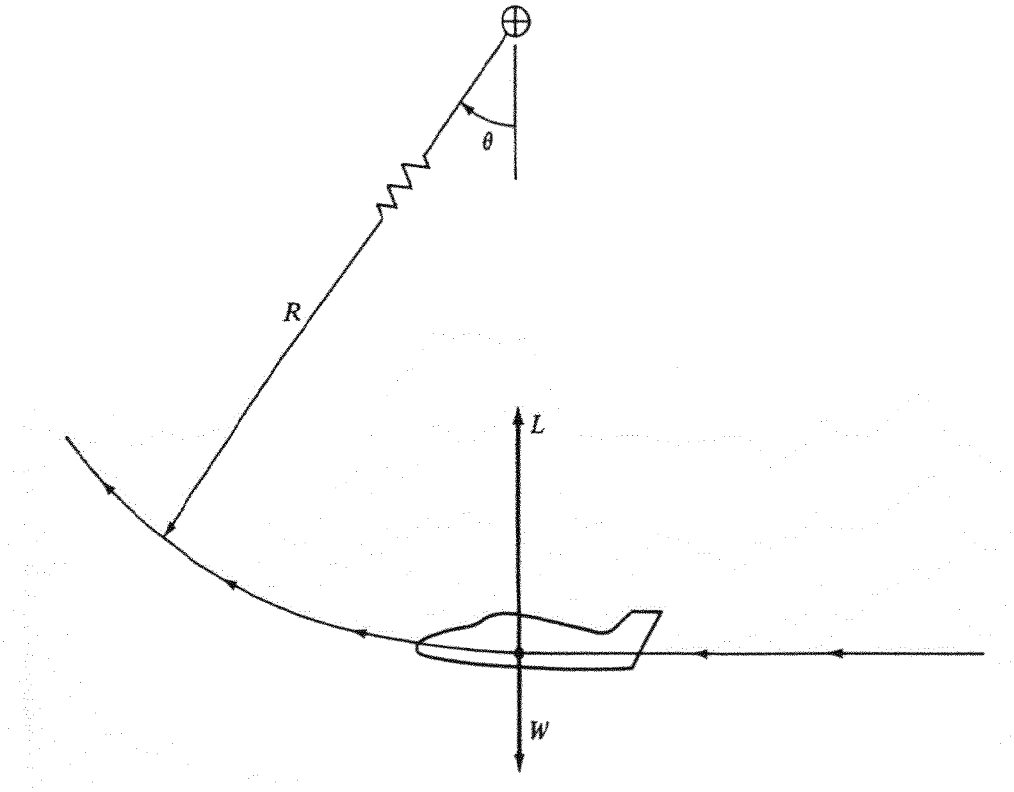

Abb.27 Aufschwung

Die resultierende Kraft wirkt in diesem Falle vertikal und ist gegeben durch:

$$F_r = L - W = W\ (n-1) \qquad \textbf{\textit{(102)}}$$

Wiederum folgt mit dem zweiten Newtonschen Axiom aus Gleichung ***(98)***:

$$R = \frac{V_\infty^2}{g\ (n-1)} \qquad \textbf{\textit{(103)}}$$

Für die Änderung des Flugpfadwinkels ergibt sich nun analog:

$$\omega = \frac{V_\infty}{R} = \frac{g\ (n-1)}{V_\infty} \qquad \textbf{\textit{(104)}}$$

Ein verwandter Fall ist der „*Abschwung*“ aus dem Rückenflug.

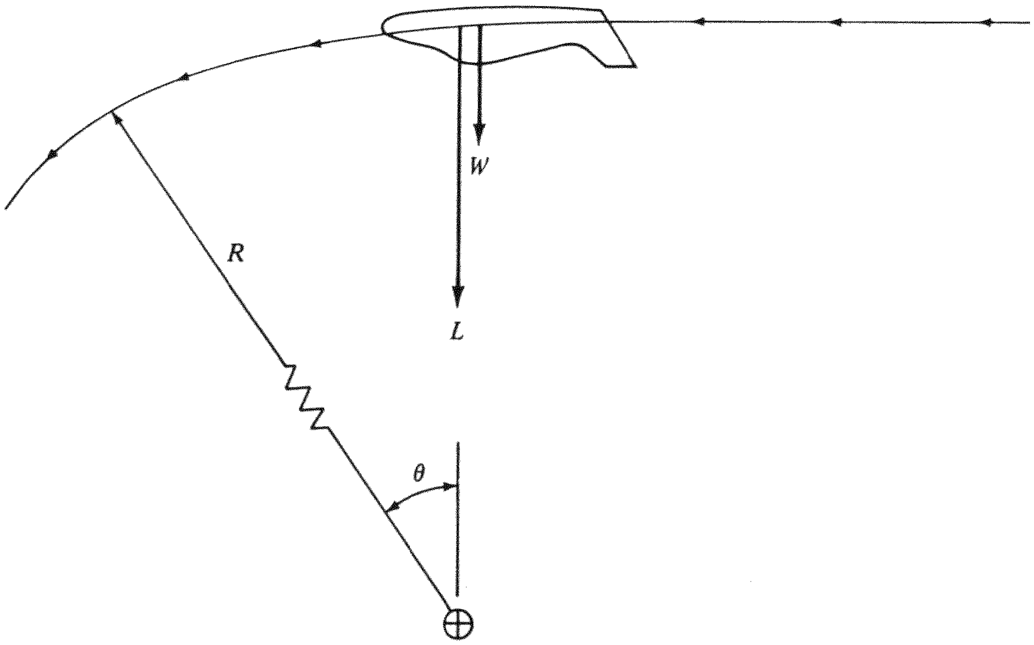

Abb.28 Abschwung

Bei analoger Vorgehensweise wie für den Aufschwung gelangt man zu folgenden Beziehungen für r und ω:

$$R = \frac{V_\infty^2}{g\,(n+1)} \tag{105}$$

$$\omega = \frac{g\,(n+1)}{V_\infty} \tag{106}$$

unter der Voraussetzung, daß das Lastvielfache weiterhin positiv angenommen wird. Deshalb ist in ***Abb.28*** die Rückenfluglage angegeben.

Weiterführende Betrachtungen zu diesen Manövern erlauben bei Nichtbeachtung des Schwerkrafteinflusses, was etwa im Moment des senkrechten Sturz- oder Steigfluges sowie bei extrem steilem Kurvenflug der Fall ist, die Angabe der Beziehungen in verallgemeinerter Form:

$$R = \frac{V_\infty^2}{g\,n} \tag{107}$$

$$\omega = \frac{g\,n}{V_\infty} \tag{108}$$

Es wird Gleichung ***(17)*** unter Verwendung von ***(15)*** nach V_∞ umgestellt und danach in ***(107)*** und ***(108)*** eingesetzt:

$$R = \frac{2}{g\rho_\infty c_L} \cdot \frac{W}{S} \tag{109}$$

$$\omega = g\sqrt{\frac{\rho_\infty c_L\, n}{2(W/S)}} \tag{110}$$

in diesen Gleichungen taucht jeweils ein charakteristischer Faktor auf:

$$\frac{W}{S} \equiv \quad \textit{Flächenbelastung} \tag{111}$$

Aus den Gleichungen ***(109)*** sowie ***(110)*** ist klar ersichtlich, daß Flugzeuge mit geringer Flächenbelastung unter sonst gleichen Bedingungen schnellere Kursänderungen mit kleineren Kurvenradien ausführen können, also manövrierfähiger sind. Einsetzen von $c_{L,max}$ und n_{max} liefert die Bestwerte:

$$R_{\min} = \frac{2}{g\rho_\infty c_{L,\max}} \frac{W}{S} \tag{112}$$

$$\omega = g\sqrt{\frac{\rho_\infty c_{L,\max}\, n_{\max}}{2(W/S)}} \tag{113}$$

Weiterhin stellt sich die beste Manövrierfähigkeit in Bodennähe ein, da dort die Luftdichte ihren größten Wert hat.

Überdies sind noch weitere Einschränkungen zu beachten, da bei niedrigen Geschwindigkeiten das Lastvielfache selbst vom Auftriebsbeiwert abhängig:

$$n_{\max} = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2\, c_{L,\max} \frac{1}{(W/S)} \tag{114}$$

Bei höheren Geschwindigkeiten wird das Lastvielfache dann durch die Strukturfestigkeit des Flugzeuges bestimmt.

Außerdem gibt es noch eine höchstzulässige Geschwindigkeit, ab welcher auch im Geradeausflug Strukturversagen zu befürchten ist. Trägt man diese Restriktionen alle in das *V-n*-Diagramm (***Abb.29***) ein, so erhält man den Bereich von Flugzuständen, in dem das Flugzeug eingesetzt werden kann.

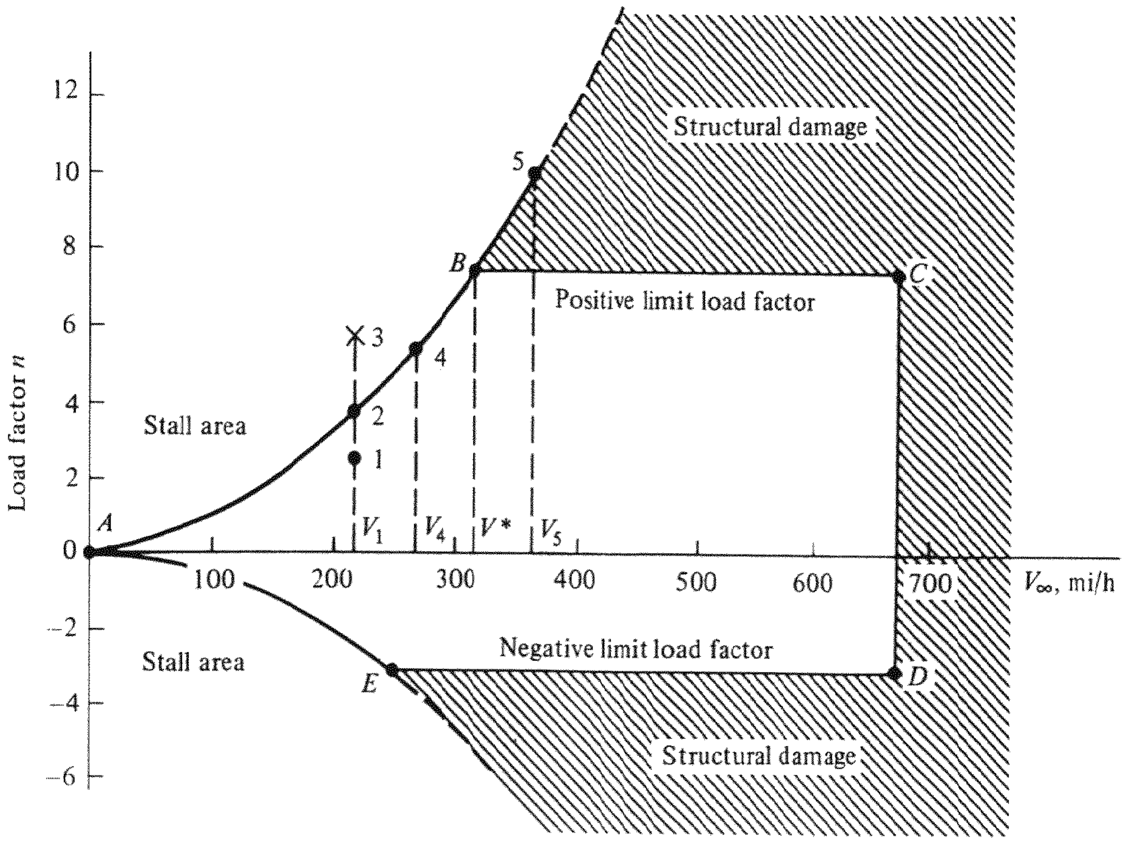

Abb.29 Typisches V-n-Diagramm für einen Strahltrainer der USAF Academy

Bestmögliche Manövrierfähkeit wird nach ***(113)*** dann erreicht, wenn Auftrieb und Lastvielfaches ihre höchstzulässigen Werte annehmen. Das ist bei einer bestimmten Geschwindigkeit *V** der Fall, die leicht durch Umstellen von ***(114)*** zu ermitteln ist.

$$V^* = \sqrt{\frac{2\, n_{\max}}{\rho_\infty\, c_{L,\max}} \frac{W}{S}} \qquad \textbf{\textit{(115)}}$$

Einige Flugleistungsdaten hängen vom Verhältnis von Auftrieb und Widerstand in verschiedenen Potenzen ab. In den Abschnitten **4** und **6** tauchten sie in den Formeln für erforderlichen Schub sowie die erforderliche Leistung auf.

Teil 2 Flugstabilität und Flugsteuerung

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Flugleistungsberechnung des Teils 1 umfaßt die Bewegungen des Flugzeuges entlangseiner Flugbahn. Es handelt sich dabei um die folgenden Flugzustände:

- unbeschleunigten Horizontalflug,
- unbeschleunigten Steigflug,
- beschleunigte und verzögerte Flugzustände bei Start und Landung,
- beschleunigte Flugzustände beim Kurvenflug.

In all diesen Fällen wird das Flugzeug als Punktmasse betrachtet, die in seinem Schwerpunkt *0* konzentriert ist. Diese Vereinfachung ist vorteilhaft, um die *globalen Bewegungen* des Flugzeuges zu beschreiben. Desweiteren treten aber auch Bewegungen der Flugzeugstruktur *um den Schwerpunkt* auf, wenn nun auch Momente wirken, als Folge von Kräften, die an verschiedenen Punkten der Geometrie angreifen. Es ergeben sich daher zusätzliche Geschwindigkeitskomponenten zu den innerhalb der Flugleistungen beschriebenen.

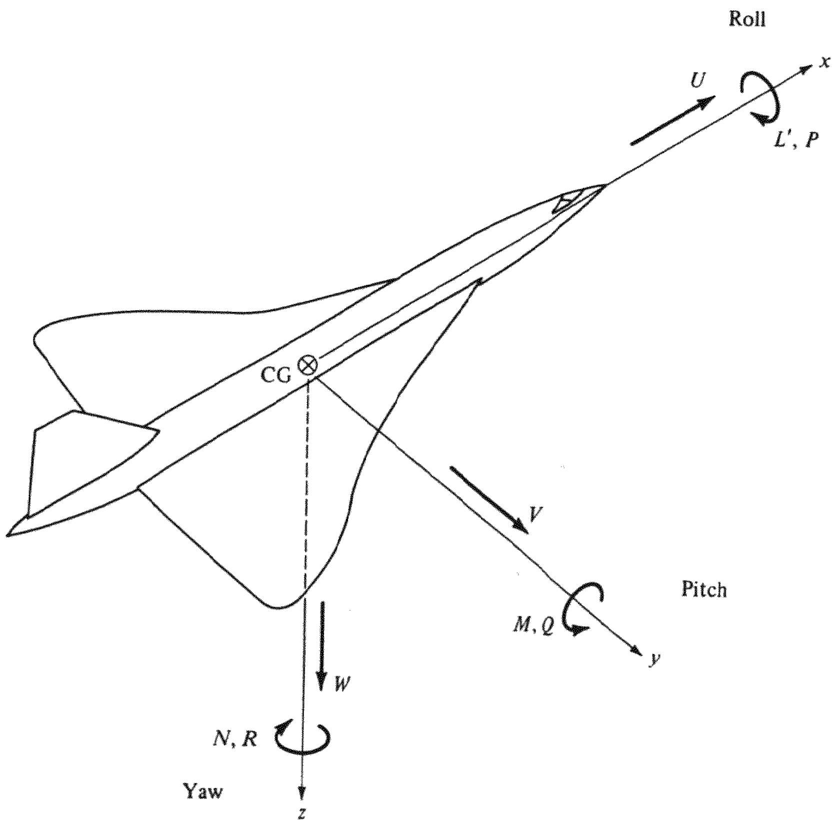

Abb.1 Definition der Flugzeugachsen, der Kräfte und Momente

Entsprechend ***Abb.1*** ist ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung im Schwerpunkt körperfest zum Flugzeug installiert. Die Geschwindigkeitskomponenten *u*, *v* und *w* zeigen in die Richtungen der Koordinatenachsen *x*, *y* und *z*. Die Rotationsbewegung um diese Achsen wird in den Winkelgeschwindigkeiten *p*, *q* und *r* entsprechend den Momenten *L*, *M* und *N* angegeben.

Dabei stehen:

- *p* und *L* für Rollen um die *x*-Achse
- *q* und *M* für Nicken um die *y*-Achse
- *r* und *N* für Gieren um die *z*-Achse

Diese Bewegungen des Flugzeuges können mit Hilfe der Quer-, Höhen- und Seitenrudern (***Abb.2***) gesteuert werden.

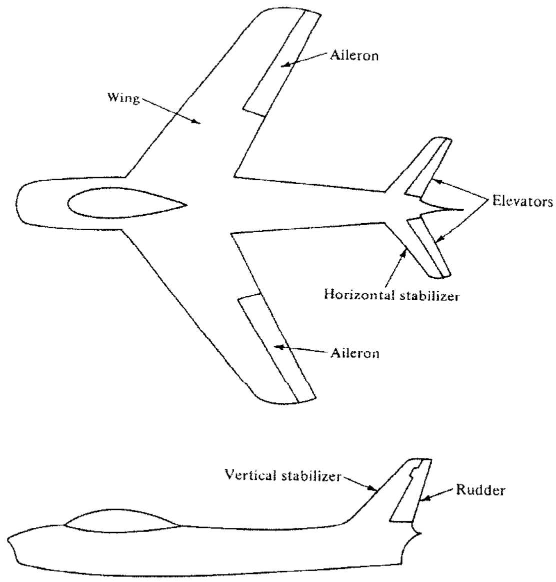

Abb.2 Baugruppen am Flugzeug

Die Ausschläge der Ruder führen zu den in ***Abb.3*** charakterisierten Momenten. Rollen, Nicken und Gieren werden auch als laterale, longitudinale und direktionale Bewegungen und die Steuerorgane in analoger Weise bezeichnet.

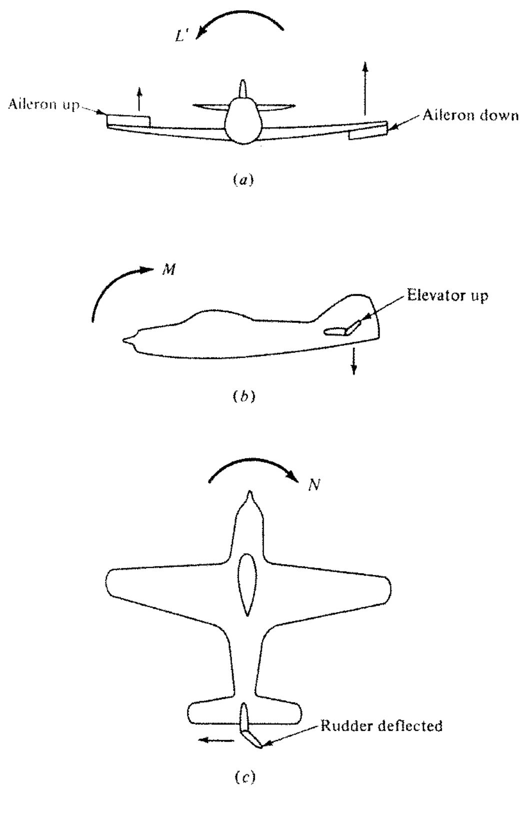

Abb.3 Auswirkungen der Ruderausschläge auf die Fluglage

2 Definition von Flugstabilität und Flugsteuerung

Statische Stabilität:

Ein im Gleichgewichtszustand insbesonder im unbeschleunigter Horizontalflug befindliches Flugzeug aus ***Abb.4*** wird durch eine äußere Kraft – beispielsweise durch eine Windböe – gestört.

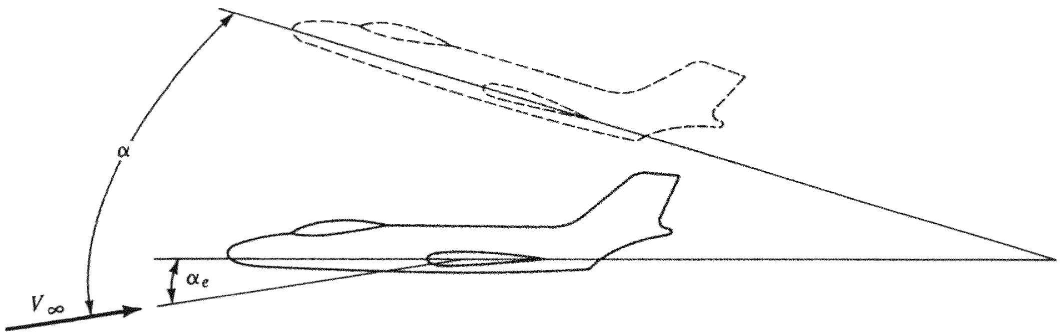

Abb.4 Störung des Trimmanstellwinkels

Je nachdem, ob es sich anschließend wieder in die Ausgangslage zurückzubewegen versucht, die Abweichung sich immer weiter verstärkt oder in gewissen Grenzen einfach bestehen bleibt, bezeichnet man das Gleichgewicht des jeweiligen Flugzustandes als statisch stabil, statisch instabil oder indifferent.

Dynamische Stabilität:

Unter der Voraussetzung *statischer Stabilität* ist weiterhin das zeitliche Verhalten – das Abklingen oder das Anfachen – einer Störung von Interesse. Wenn ein statisch stabil fliegendes Flugzeug aus seinem Flugzustand gedrängt wird, versucht es, diesen augenblicklich wieder einzunehmen. Wenn die Abweichung stetig abnimmt und sofort zu *0* zurückgeht, so wird das als *aperiodischer Grenzfall* [***Abb.5(a)***] bezeichnet.

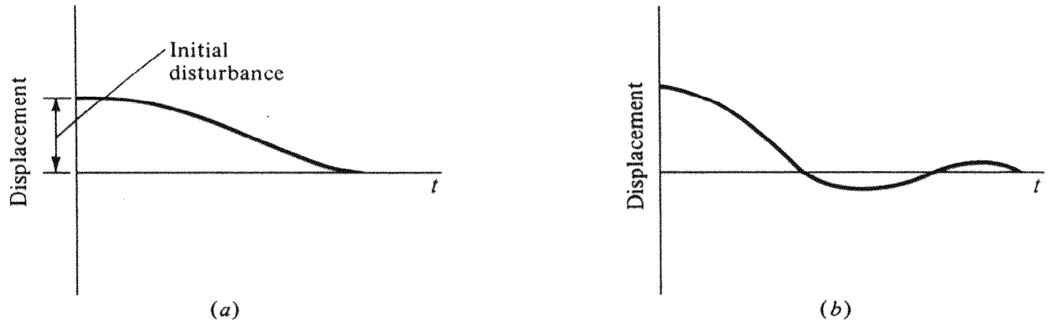

Abb.5 Beispiele dynamischer Stabilität

Meist ist jedoch ein leichtes Überschwingen über die Nullage hinaus zu beobachten, was dann wieder zu einer Ausgleichswirkung in die andere Richtung führt. Ein solches allmähliches Abklingen wird als *gedämpfte Schwingung* [***Abb.5(b)***] beschrieben und führt wie der erste Fall zu *dynamischer Stabilität*. Ist das Überschwingen aber so stark, daß es über die Auslenkung der ursprünglichen Störung hinausgeht, dann führt das zu einem Aufschaukeln der Schwingung mit ständig steigender Amplitude (***Abb.6***). Dieses Verhalten nennt man *dynamisch instabil*.

Statische Stabilität ist also eine notwendige Voraussetzung für das Erreichen der dynamischen und somit von grundlegender Bedeutung. Da sie weiterhin mit elementaren mathematischen Mitteln zu beschreiben ist, soll die statische Stabilität im folgenden vorrangig behandelt werden. Diese Fragestellungen sind eng verwand mit Stabilitätsproblemen in der Regelungstechnik. Umgekehrt ist es sogar möglich, mit Hilfe leistungsfähiger Flugregelungsanlagen von ihrer Aerodynamik her statisch instabile Flugzeuge, die zum Teil bessere Flugleistungen erreichen, insgesamt flugstabil zu machen.

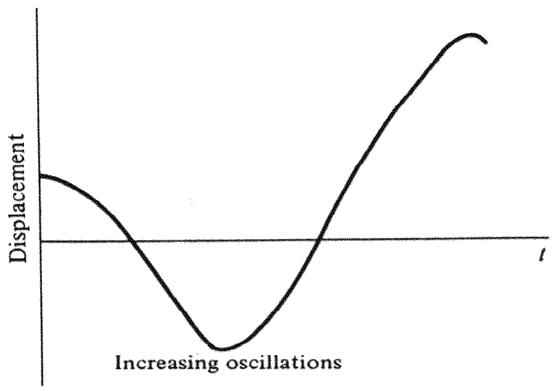

Abb.6 Beispiel dynamischer Instabilität

Steuerung:

Der Problemkreis Steuerung und Kontrolle umfaßt Fluglageänderungen, die durch Ruderausschläge hervorgerufen werden und von einem Gleichgewicht zum nächsten bzw. zu beschleunigten Nichtgleichgewichtszuständen, wie Manövern, führen.

3 Wirkende Momente am Flugzeug

Betrachtungen zu Flugstabilität und Steuerung fußen letztlich auf Momenten, die durch Kräfte am gesamten Flugzeug und besonders an den Ruderflächen hervorgerufen werden. Die Druck-, aber auch die Schubspannungsverteilung über einen Flügel erzeugen ein Nickmoment. Die Momentenbilanz kann um jeden beliebigen Punkt aufgestellt werden, gebräuchlich sind Profilnase oder Profilhinterkante sowie ein ¼–Flügeltiefe. ***Abb.7*** zeigt die Kräfte F_1 und F_2 als Resultierende der Druckverteilung auf Flügelober- und unterseite.

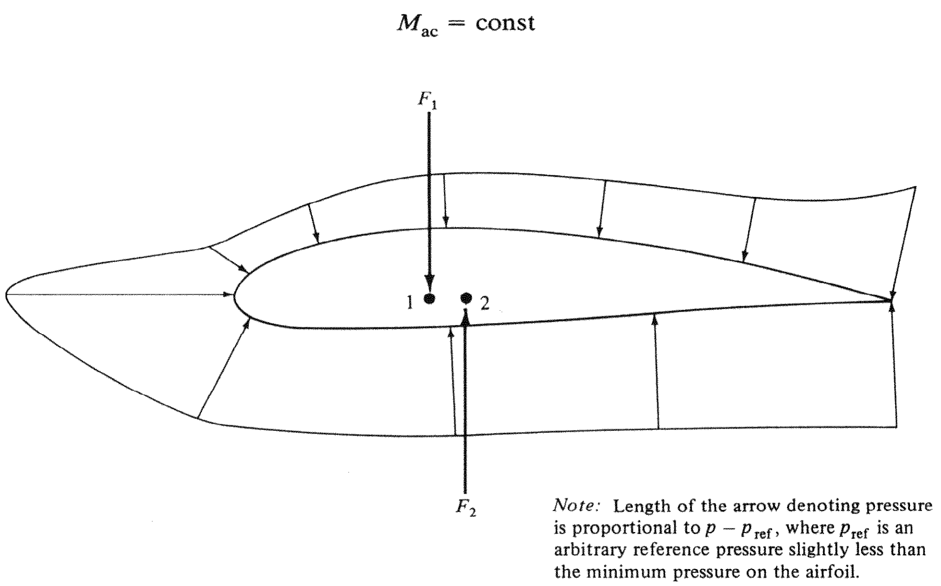

Abb.7 Enstehung von Momenten an Flugzeugprofilen

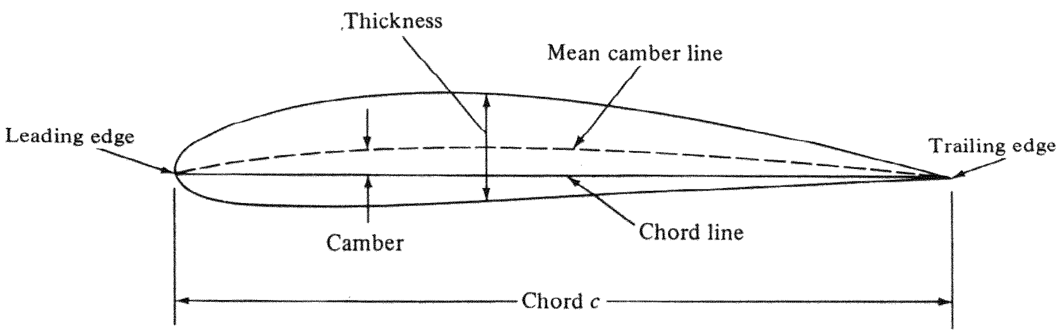

Abb.8 Bezeichnungen an einem Flügelprofil

Es läßt sich ein Punkt auf der Profilsehne finden, um den das aerodynamische Moment unabhängig vom Anstellwinkel ist. Dieser Punkt wird Neutralpunkt *„AC“ (Aerodynamic Center)* des Profils genannt. Dieses Moment und der zugehörige Koeffizient sind definiert über:

$$M_{ac} = c_{M,ac}\ q_{\infty} S\ c \tag{1}$$

Hierin bedeutet:

c Länge der Profilsehne.

In dem Fall, daß der Flügel keinen Auftrieb liefert, sind zumindest die vertikalen Komponenten der beiden Kräfte in ***Abb.7*** gleich groß; die horizontalen Anteile sollten sehr klein sein und die Angriffspunkte in z-Richtung eng beieinander. Daraus läßt sich schlußfolgern, daß dann das Nickmoment um jeden beliebigen Punkt gleich sein muß. Daher gilt für Auftrieb Null:

$$M_{ac} = M_{bliebig} \tag{2}$$

als *Nullauftriebsmoment*, sowie

$$\left(c_{M,l/4}\right)_{L=0} = \left(c_{M,beliebig}\right)_{L=0} = c_{M,ac} \tag{3}$$

Verallgemeinernd kann nun auch eine Momentenbilanz um das *gesamte* Flugzeug aufgestellt werden (***Abb.9***).

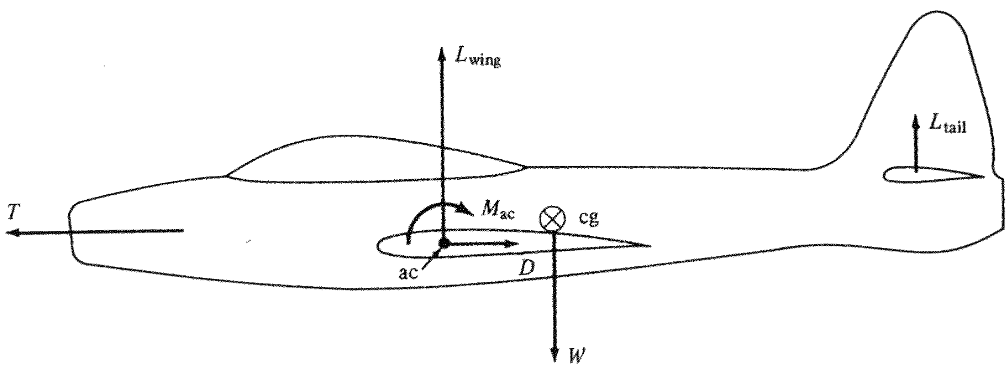

Abb.9 Aerodynamische Momente um den Schwerpunkt eines Flugzeuges

Momente werden hervorgerufen durch:

- Auftrieb am Flügel,
- Auftrieb am Höhenleitwerk (üblicherweise negativ, siehe Abschnitte **5** und **7**),
- Widerstand,
- Schub,
- Moment um den Neutralpunkt,
- Aerodynamische Kräfte und Momente auf Flugzeugteile wie Rumpf, Fahrwerk, Gondeln.

Das Gewicht liefert keinen Anteil, da es im Schwerpunkt angreift. Der Gesamtnickmomentenkoeffizient ergibt sich daher aus:

$$c_{M,cg} = \frac{M_{cg}}{q_\infty S\, c} \tag{4}$$

Ein Flugzeug befindet sich dann im Längsgleichgewicht, wenn das Nickmoment um den Schwerpunkt Null ist, es ist dann *getrimmt*.

4 Absoluter Anstellwinkel

In ***Abb.10(a)*** ist ein Flügel mit einem Anstellwinkel $\alpha_{A=0}$ dargestellt, d.h. er liefert keinen Auftrieb.

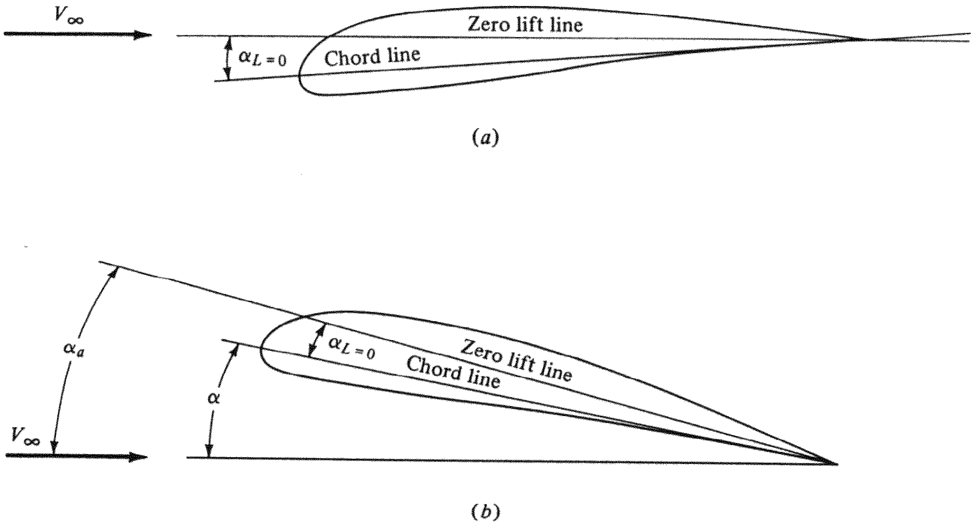

Abb.10 Nullauftriebslinie und absoluter Anstellwinkel

Es läßt sich dann eine *Nullauftriebslinie* in Haupstromrichtung durch die Hinterkante einzeichnen. Der Winkel zwischen dieser und der Profilsehne ist α_0. Wird der Flügel angestellt, so ist der Winkel zwischen Profilsehne und Anströmrichtung der geometrische Anstellwinkel α. Der Absolute Anstellwinkel ist nun der zwischen Anströmrichtung und Nullauftriebslinie:

$$\alpha_a = \alpha + \alpha_0 \tag{5}$$

Abb.11 zeigt anschaulich den Vorteil der Einführung des absoluten Anstellwinkels α_a, denn bei gekrümmten Flügelprofilen wird der Auftrieb erst bei negativen geometrischen Anstellwinkeln, $\alpha = 0$. Dieser Effekt ist zu dem für jedes Profil unterschiedlich stark.

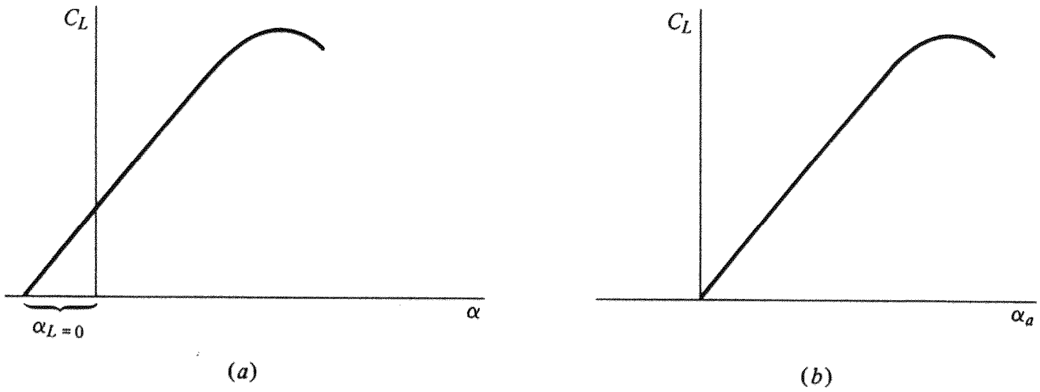

Abb.11 Auftriebsbeiwerte über *a)* dem geometrischen Anstellwinkel
b) dem absoluten Anstellwinkel

5 Kriterien für statische Längsstabilität

Die durch Nickmomente beeinflußte Längsstabilität ist die bedeutendere gegenüber Quer- und Seitenstabilität. Hier wird nur die Längsstabilität betrachtet.

Wenn ein Flugzeugmodell im Windkanal untersucht wird, wird unter anderem eine Kurve aufgenommen, die den Momentenbeiwert um den Schwerpunkt *0* über dem absoluten Anstellwinkel angibt. In ***Abb.12*** ist eine solche Kurve für ein konventionelles Flugzeug dargestellt.

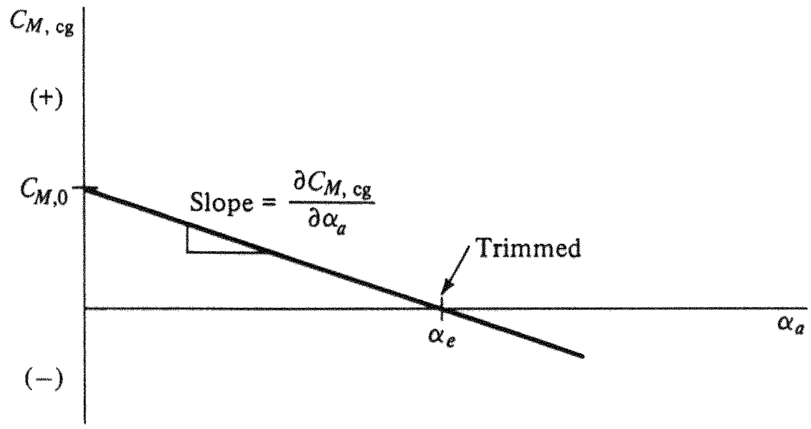

Abb.12 Momentenbeiwert über α_e mit negativem Anstieg

Im allgemeinen verläuft diese Kurve nahezu linear mit einem negativen Anstieg. Ohne Auftrieb entspricht das Moment dem um den Neutralpunkt mit $c_{M,N}$. Wenn $c_{M,cg} = 0$ wird, so ist ein Anstellwinkel α_e erreicht – *e* steht für *Equilibrium = Gleichgewicht* – ein getrimmter Flugzustand ist erreicht. ***Abb.13*** stellt außerdem gestörte Fluglagen dar, wie sie durch Windböen hervorgerufen werden können und die zu $\alpha_a > \alpha_e$ oder $\alpha_a < \alpha_e$ führen. Aus ***Abb.12*** kann man sich leicht vorstellen, wie sich das Flugzeug im Hinblick auf seine Längsstabilität verhalten wird.

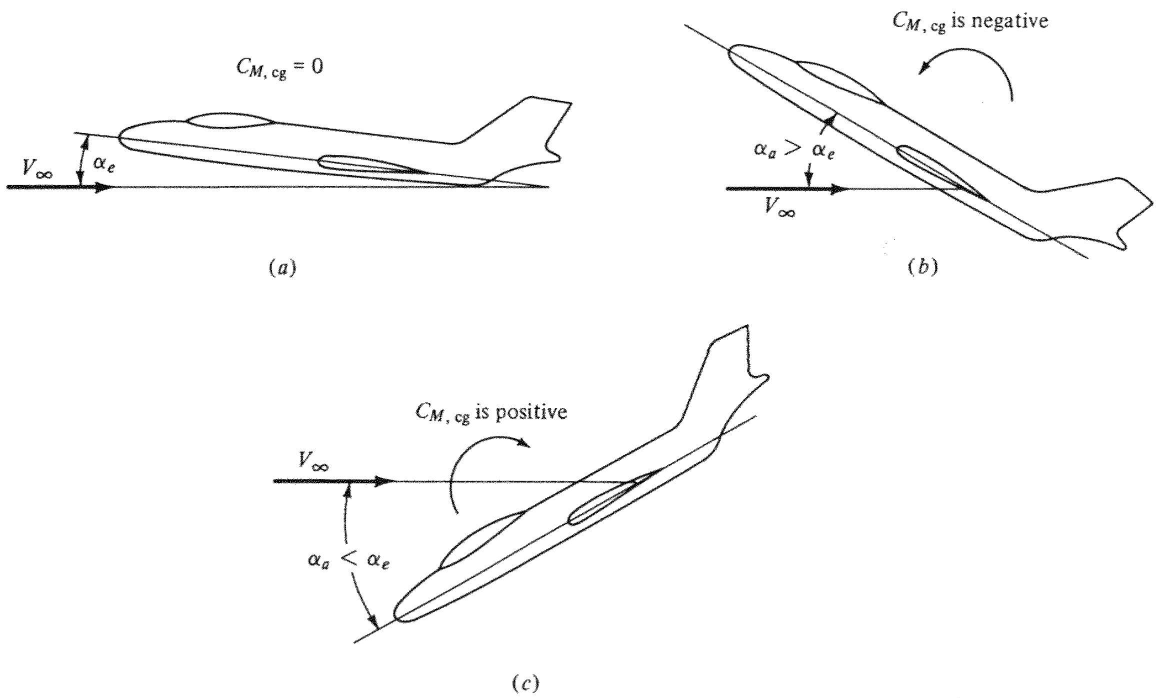

Abb.13 Illustration statischer Stabilität

Es zeigt sich, daß das entstehende Moment der Störauslenkung entgegenwirkt und somit das Flugzeug in seine getrimmte Lage zurückbefördert. Die Schlußfolgerung daraus ist die, daß ein Flugzeug mit dem in ***Abb.12*** beschriebenen aerodynamischen Momentenverlauf statisch stabil fliegen wird.

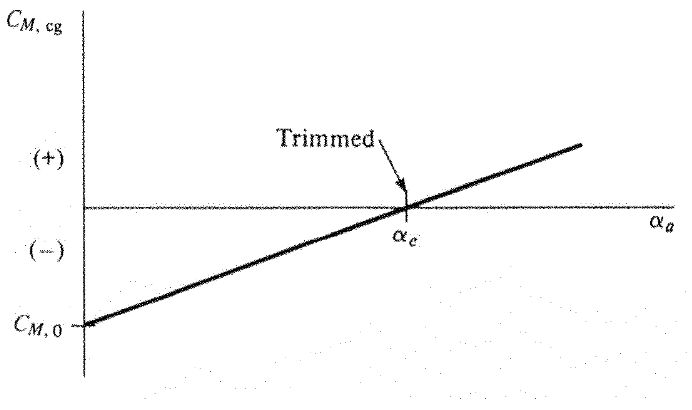

Abb.14 Momentenbeiwert über α_a

Eine analoge Schlußfolgerung kann für Flugzeuge mit dem in ***Abb.14*** dargestellten Momentenverlauf getroffen werden. Das Verhalten wird dann genau entgegengesetzt sein. ***Abb.15*** zeigt anschaulich, daß das aerodynamische Moment destabilisierend wirkt, da es dazu neigt, eine Störung zu verstärken. Derartige Flugzeuge sind statisch instabil.

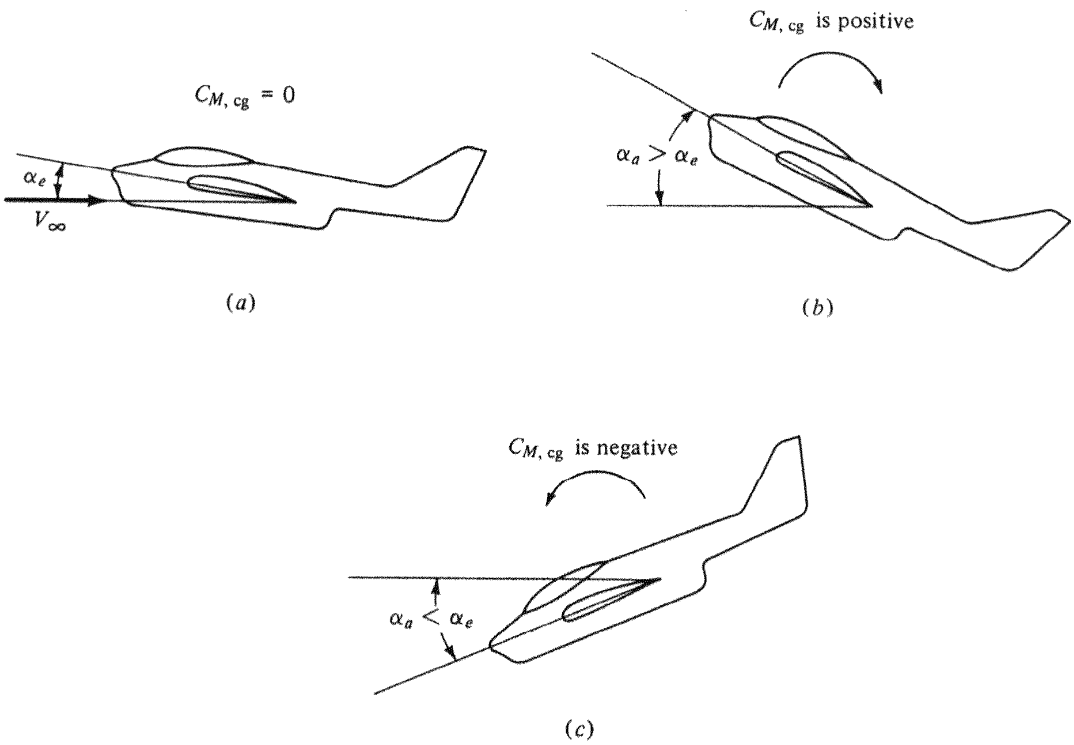

Abb.15 Illustration statischer Instabilität mit positivem Anstieg

Weil das Flugzeug bei verschiedenen Geschwindigkeiten fliegen können muß, die in einem Bereich zwischen der Überziehgeschwindigkeit V_{stall} und der Höchstgeschwindigkeit V_{max} liegen, müssen auch verschiedene Anstellwinkel eingenommen werden. Da sich der dynamische Druck q_∞ mit der Geschwindigkeit ändert, ist es notwendig, daß der Auftriebsbeiwert c_L dem neuen Flugzustand angepaßt wird. Daher muß der Wert für α_e in diesem Bereich einstellbar werden, um bei allen Geschwindigkeiten einen getrimmten Flug zu ermöglichen. Grundsätzlich müssen daher zwei Bedingungen erfüllt sein, um ein Flugzeug trimmbar längsstabil zu halten:

- $$\frac{\partial c_{ac,0}}{\partial \alpha_a} < 0$$

(6)

- $$c_{M,ac} > 0$$

Ein positiv gekrümmtes Tragflügelprofil liefert jedoch aufgrund der Druckverteilung üblicherweise ein negatives aerodynamisches Moment. Angenommen, der Auftrieb sei null, so wird das Moment an jedem beliebigen Punkt das gleiche sein:

$$c_{M,ac} = c_{M,cg} \qquad \textit{kein Auftrieb, Flügel allein} \qquad \textbf{(7)}$$

Das heißt, auch das Moment um den Schwerpunkt ist dann negativ, der Flügel allein wird nicht trimmbar sein. Um diesen Zustand zu korrigieren, ist das Höhenleitwerk Bestandteil üblicher Flugzeugkonfigurationen. Ist es als „*Schwanz*“ hinter dem Flügel [***Abb.16a)***] angebracht, so muß es negativen Auftrieb liefern, um ein zusätzliches positives Moment um den Schwerpunkt zu erzeugen, so daß bei bedachter Wahl dieses Gegenmomentes eine Trimmung erfolgen kann.

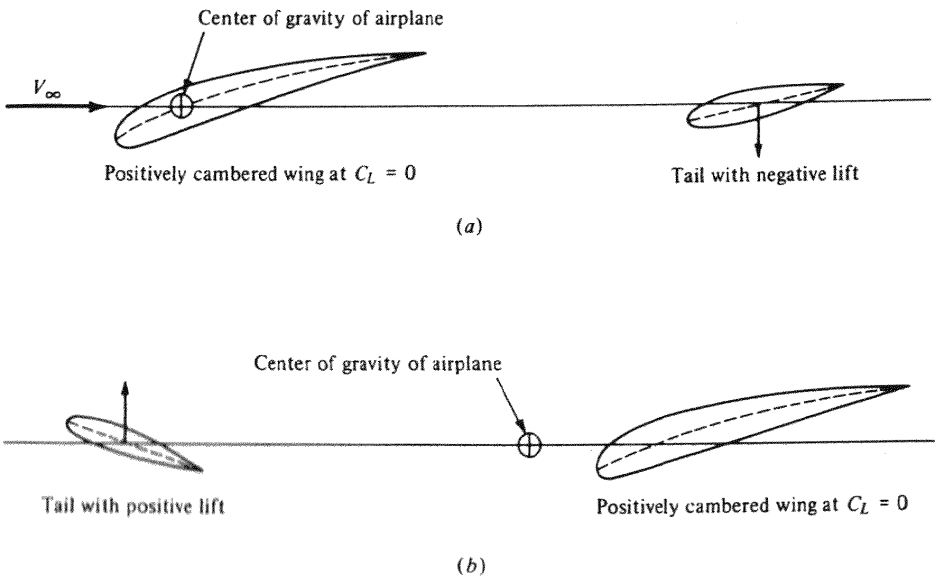

Abb.16 *a)* Konventionelle Flügel-Leitwerks-Anordnung
b) Entenkonfiguration

Wird das Höhenleitwerk vor dem Flügel angeordnet, so spricht man von einer *Entenkonfiguration*. In diesem Falle muß das Leitwerk für positiven Auftrieb eingestellt sein, um denselben Effekt zu erzielen. Während die Entenbauweise zunächst vorteilhaft scheint, weil hier das Leitwerk zusätzlichen Auftrieb liefert, der bei konventioneller Anordnung negativ ist und damit unter Entstehung zusätzlichen Widerstandes vom Flügel kompensiert werden muß, bewirkt der Nachlauf des Entenleitwerkes geringer Spannweite zum Teil nicht unerhebliche Störungen der Flügelumströmung, so daß im konkreten Fall genau abgewägt werden muß, welcher Auslegung der Vorzug zu geben ist.

6 Einfluß des Flügels auf das Gesamtmoment

Nunmehr sollen die Einflüsse von Flügel, Leitwerk sowie der restlichen Flugzeugbaugruppen getrennt betrachtet werden, um das Gesamtmoment um den Schwerpunkt M_{cg} ermitteln zu können.

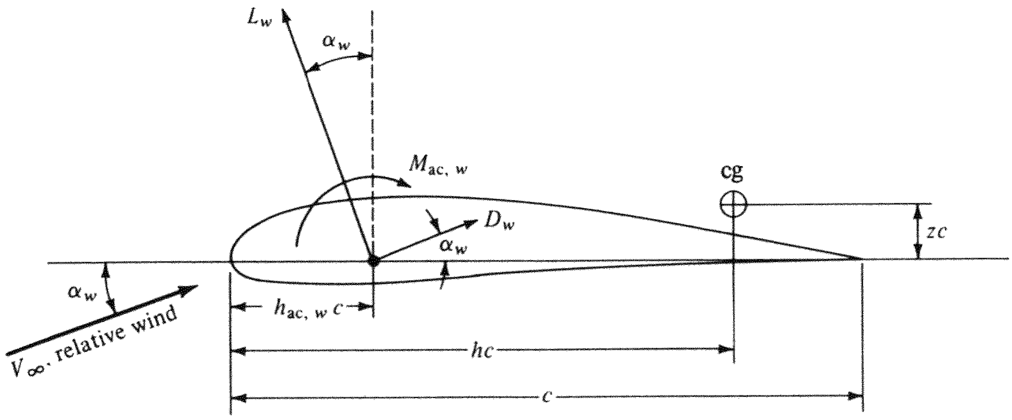

Abb.17 Geometrie und Bezeichnungen am angeströmten Flügelprofil

Abb.17 soll einen Eindruck davon vermitteln, wie Kräfte und Momente am Flügel auf den Schwerpunkt des gesamten Flugzeuges wirken. Zum leichteren Verständnis ist die Nullauftriebslinie parallel zum Horizont eingezeichnet. Damit ist α_W der absolute Anstellwinkel, während c die Sehnenlänge in Nullauftriebsrichtung darstellt, z und h werden auf c bezogen angegeben. Wie üblich sind Auftrieb L_W und Widerstand D_W senkrecht bzw. parallel zur Anströmrichtung angetragen. Die durch den Flügel hervorgerufenen Momente um den Schwerpunkt sind damit:

$$\begin{aligned} M_{cg,W} = M_{ac,W} &+ L_W \cos\alpha_W \, (h_C - h_{ac,W}) \\ &+ D_W \sin\alpha_W \, (h_c - h_{ac,W}) \\ &+ L_W \sin\alpha_W \, z\,c - D_W \cos\alpha_W \, z\,c \end{aligned} \qquad \textit{\textbf{(8)}}$$

Für die üblichen Flugzustände konventioneller Flugzeuge ist α_W so klein, daß in guter Näherung $\cos\alpha_W = 1$ sowie $\sin\alpha_W = \alpha_W$ gilt. Damit vereinfacht sich die Gleichung:

$$M_{cg,W} = M_{ac,W} + \left(L_W + D_W \alpha_W\right)\left(h - h_{ac,W}\right)c \\ + \left(L_W \alpha_W - D_W\right) z\, c \qquad \textbf{(9)}$$

Hierauf ergibt eine Division durch $q_\infty S$

$$c_{M,cg,W} = c_{M,ac,W} + \left(c_{L,W} + c_{D,W}\alpha_W\right)\left(h - h_{ac,W}\right) + \left(c_{L,W}\alpha_W - c_{D,W}\right) z \qquad \textbf{(10)}$$

Bei den meisten Flugzeugen liegt der Schwerpunkt nahe an der Nullauftriebslinie, so daß die sogenannte *z*–Schwerpunktslage vernachlässigt werden kann, üblicherweise ist $\alpha_W << 1$ sowie $c_D << c_L$. Diese Annahmen führen auf:

$$c_{M,cg,W} = c_{M,ac,W} + c_{L,W}\left(h - h_{ac,W}\right) \qquad \textbf{(11)}$$

Aus der Kurve c_L über α_a kann entnommen werden, daß gilt:

$$c_{L,W} = \frac{dc_{L,W}}{d\alpha}\alpha_W = a_W\ \alpha_W \qquad \textbf{(12)}$$

wobei a_W der Anstieg des Auftriebsbeiwertes über dem Anstellwinkel ist.

$$c_{M,cg,W} = c_{M,ac,W} + a_W \alpha_W\left(h - h_{ac,W}\right) \qquad \textbf{(13)}$$

Die Gleichungen ***(12)*** und ***(13)*** verdeutlichen nun, daß der Beitrag des Flügels zum Gesamtmoment im wesentlichen von zwei Faktoren beeinflußt wird:

- dem aerodynamischen um den Neutralpunkt,
- dem Auftrieb und seinem Hebelarm $(h\text{-}h_{ac,W})\ c$

Wird der Rumpf mit in die Betrachtungen einbezogen, so erfährt dieser ebenfalls ein Moment um seinen Neutralpunkt sowie Auftrieb und Widerstand. Fügt man nun beide zu einer Flügel-Zellen-Kombination („*WB“ – wing-body*) zusammen, so ist leicht einzusehen, daß sich die Umströmung beider gegenseitig beeinflußt, so daß eine Einfache Summenbildung der Kräfte und Momente nicht zu brauchbaren Ergebnissen führen wird. Daher müssen diese Polaren üblicherweise aus Messungen gewonnen werden, da eine theoretische Beschreibung der Wechselwirkungen derzeit nicht möglich ist.

$$c_{M,cg,WB} = c_{M,ac,WB} + c_{L,WB}\left(h - h_{ac,WB}\right) \qquad \textbf{(14)}$$

$$c_{M,cg,WB} = c_{M,ac,WB} + a_{WB}\alpha_{WB}\left(h - h_{ac,WB}\right) \qquad \textbf{\textit{(15)}}$$

Im Allgemeinen verschiebt sich für die Flügel-Zellen-Kombination der Neutralpunkt nach vorn, erhöht sich der Anstieg des Auftriebsbeiwertes und liefert einen negativen Beitrag zum Moment um den Neutralpunkt.

7 Einfluß des Leitwerkes auf das Gesamtmoment

Das Höhenleitwerk kann nicht als ein seperater Flügel verstanden werden, da zwei durch den Flügel hervorgerufene Effekte auftreten:

- Die Strömung wird durch den Flügel nach unten abgelenkt, so daß sich ein anderer Anströmwinkel für das Leitwerk ergeben kann.
- Durch Reibungs- und Druckwiderstand bremst der Flügel auch die Strömung im Nachlauf ab, so daß das Leitwerk mit geringerer Geschwindigkeit angeströmt wird.

Diese Effekte werden in ***Abb.18*** dargestellt. Beidem kann beispielsweise durch T-Leitwerke entgegengewirkt werden, bei denen die Höhenflossen nicht mehr im Nachlauf der Tragflügel liegen.

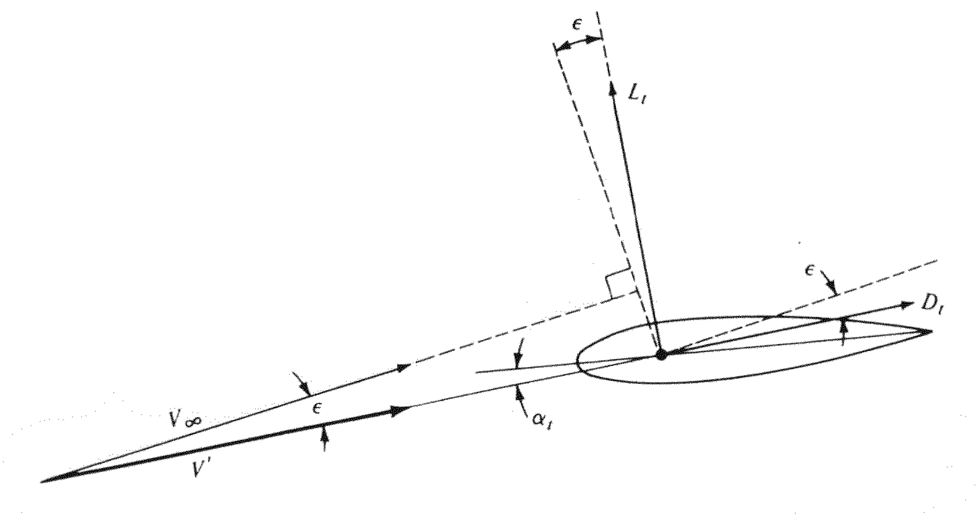

Abb.18 Strömung und Kräfte in der Umgebung des Höhenleitwerkes

Hierin bedeuten:

ε	Ablenkungswinkel
V'	Anströmgeschwindigkeit des Leitwerkes
L_t	Auftrieb des Leitwerkes
D_t	Widerstand des Leitwerkes

Nunmehr hat eine Transformation in die Hauptströmungsrichtung zu erfolgen:

$$L_{tail} = L_t \cos\varepsilon - D_t \sin\varepsilon \qquad \textbf{(16)}$$

Oftmals – wenn Gegenmaßnahmen ergriffen wurden – ist ε sehr klein, so daß wieder gilt:

$$L_{tail} \approx L_t \qquad \textbf{(17)}$$

In ***Abb.19*** wird das Leitwerk in seiner Lage zur Nullauftriebslinie der Flügel-Zellen-Kombination betrachtet.

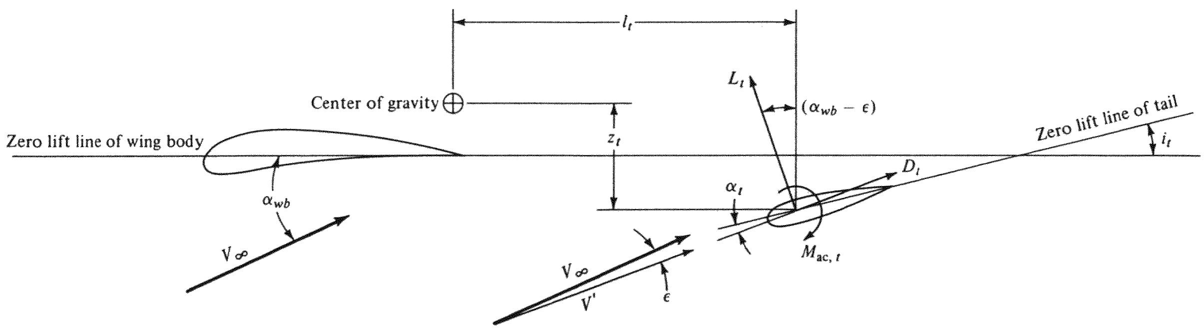

Abb.19 Geometrie einer Flügel-Leitwerks-Konfiguration

Die Gesamtanordnung habe einen absoluten Anstellwinkel α_{WB}. Das Höhenleitwerk ist nach unten angestellt, um einen positiven Momentenbeiwert $c_{M,0}$ um den Gesamtneutralpunkt zu erreichen. Dan Schließen die Nullauftriebslinien von Leitwerk und Gesamtanordnung den Leitwerkseinstellwinkel i_t ein. Die Profile von Leitwerken sind oftmals symmetrisch, damit sind Nullauftriebslinie und Profilsehne identisch. Zwischen dieser und der Richtung der Anströmgeschwindigkeit *V'* wird der absolute Anstellwinkel des Leitwerkes α_t gemessen. L_t bildet mit der Vertikalen den Winkel $\alpha_{WB} - \varepsilon$. Der Neutralpunkt des Leitwerkes liege bei l_t und z_t. Um den Beitrag des Leitwerkes zum Gesamtmoment zu bestimmen, werden L_t und D_t in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten zerlegt. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{cg,t} = &- l_t \left[L_t \cos(\alpha_{WB} - \varepsilon) + D_t \sin(\alpha_{WB} - \varepsilon) \right] \\ &+ z_t \left[L_t \sin(\alpha_{WB} - \varepsilon) + D_t \cos(\alpha_{WB} - \varepsilon) \right] + M_{ac,t} \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

Der erste Term der rechten Seite von Gleichung ***(18)*** ist vom Betrag wesentlich größer als die anderen beiden, so daß aus Erfahrung einige weitere Annahmen getroffen werden können, nämlich daß $z_t << l_t$, $D_t << L_t$, $(\alpha_{WB} - \varepsilon) << 1$ und $M_{ac,t}$ ist ebenfalls klein bei symmetrischen Profilen.

Damit kann ***(18)*** folgendermaßen vereinfacht werden:

$$M_{cg,t} = -l_t \; L_t \tag{19}$$

Weiterhin wird ein Auftriebskoeffizient für das Leitwerk bestimmt:

$$c_{L,t} = \frac{L_t}{q_\infty S_t} \tag{20}$$

Einsetzen von ***(20)*** in ***(19)*** ergibt:

$$M_{cg,t} = -l_t \; q_\infty S_t \; c_{L,t} \tag{21}$$

Die Division durch q_∞ S c des Flügels führt zu:

$$\frac{M_{cg,t}}{q_\infty Sc} = c_{M,cg,t} = -\frac{l_t \; S_t}{Sc} \; c_{L,t} \tag{22}$$

Die rechte Seite von Gleichung ***(22)*** enthält das Verhältnis zweier Volumina, erstens das Produkt aus Fläche und Position des Höhenleitwerkes l_t S_t und zweitens die Abmessungen des Tragflügels S c. Dieser Quotient wird auch *„Heckvolumenverhältnis“* V_H genannt.

$$V_H = \frac{l_t \; S_t}{S \; c} \tag{23}$$

Damit wird ***(22)*** umgestellt zu:

$$c_{M,cg,t} = -V_H \; c_{L,t} \tag{24}$$

Die Gleichungen ***(19)*** und ***(24)*** beschreiben den einfachen Zusammenhang, daß das Moment gleich dem Auftrieb des Leitwerkes multipliziert mit seinem Hebelarm ist. Darüber hinaus kann ***(24)*** über den Anstellwinkel ausgedrückt werden. Das Stabilitätskriterium, ***Abb.12*** und ***14***, beinhaltet den Anstieg $\partial \, c_{M,cg} / \partial \, \alpha_a$, daher sind Beziehungen in Abhängigkeit von α_a immer hilfreich.

Nach ***Abb.19*** ist der Anstellwinkel des Leitwerkes:

$$\alpha_t = \alpha_{WB} - i_t - \varepsilon \tag{25}$$

Damit kann die Gleichung ***(12)*** für das Leitwerk umgeschrieben werden zu:

$$c_{L,t} = \frac{dc_{L,t}}{d\alpha}\alpha_t = a_t\ \alpha_t \tag{26}$$

$$c_{L,t} = a_t\ \alpha_t = a_t\ (\alpha_{WB} - i_t - \varepsilon) \tag{27}$$

Der Ablenkungswinkel ε ist nur schwer theoretisch vorherzusagen und wird daher üblicherweise experimentell bestimmt. Er wird linearisiert beschrieben durch:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\alpha_{WB} \tag{28}$$

Der Ablenkungswinkel bei Nullauftrieb ε_0 wird experimentell bestimmt.
Einsetzen in ***(27)*** führt zu:

$$c_{L,t} = \alpha_t\ \alpha_{WB}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) - \alpha_t\ (i_t + \varepsilon_0) \tag{29}$$

und weiter in ***(24)*** zu:

$$c_{M,cg,t} = -a_t\ V_H\ \alpha_{WB}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) + a_t\ V_H\ (\varepsilon_0 + i_t) \tag{30}$$

8 Gesamtnickmoment um den Schwerpunkt

Für das Gesamtnickmoment M_{cg} durch Flügel–Zellen–Kombination und Leitwerk ergibt sich:

$$c_{M,cg} = c_{M,cg,WB} + c_{M,cg,t} \tag{31}$$

Mit ***(14)*** und ***(24)*** wird es:

$$c_{M,cg} = c_{M,cg,WB} + c_{L,WB}\,(h - h_{ac,WB}) - V_H c_{L,t} \tag{32}$$

oder mit ***(15)*** und ***(30)*** entsteht:

$$c_{M,cg} = c_{M,cg,WB} + a_{WB}\,\alpha_{WB}\left[\,(h - h_{ac,WB}) - V_H\,\frac{a_t}{a_{WB}}\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\right] + V_H\,a_t\,(i_t + \varepsilon_0) \tag{33}$$

Für viele konventionelle Flugzeuge wird die Lage der Nullauftriebslinie durch das Leitwerk kaum beeinflußt, so daß ***(33)*** umgeschrieben werden kann zu:

$$c_{M,cg} = c_{M,ac,WB} + a\,\alpha_a\left[\,(h - h_{ac,WB}) - V_H\,\frac{a_t}{a}\left(1 - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\right] + V_H\,a_t\,(i_t + \varepsilon_0) \tag{34}$$

9 Gleichungen für statische Längsstabilität

Die Kriterien für statische Längsstabilität besagen, daß $c_{M,0\ (\alpha=0)} > 0$ und $\partial c_{M,cg} / \partial \alpha_a < 0$ gelten muß, unter der Voraussetzung, daß α_e im üblichen Anstellwinkelbereich liege. Auf Gleichung ***(34)*** können diese Kriterien angewendet werden. Für $\alpha_a = 0$ gilt dann:

$$(c_{M,0}) = (c_{M,cg})_{L=0} = c_{M,cg,WB} + V_H\ a_t\ (i_t + \varepsilon_0) \qquad \textbf{\textit{(35)}}$$

Für gekrümmte Flügelprofile ist $c_{M,ac,WB}$ immer negativ, so daß der zweite Term auf der rechten Seite positiv genug sein muß, um das zu kompensieren und ein positives $c_{M,0}$ zu liefern. Da V_H und a_t immer positiv sowie ε_0 klein sind, muß i_t positiv sein, um dem Leitwerk einen ausreichend negativen Auftrieb zu verleihen.

Um den Anstieg des Momentenkoeffizienten zu ermitteln, wird Gleichung ***(34)*** nach α_a abgeleitet:

$$\frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha_a} = a\left[\ (h - h_{ac,WB}) - V_H\ \frac{a_t}{a}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] \qquad \textbf{\textit{(36)}}$$

Geometrische Größen wie h und V_H üben entscheidenden Einfluß auf die Längsstabilität aus. Die anderen Daten müssen in Experimenten gewonnen werden.

Bei der Konstruktion eines Flugzeuges, dessen Schwerpunktslage h in starkem Maße von der Nutzlast mitbestimmt wird, sollten daher folgende einfache Grundsätze beachtet werden:

- V_H groß genug wählen, um Stabilität zu garantieren ***(36)***,
- $c_{M,0}$ über den Leitwerkseinstellwinkel i_t bzw. ausreichend großen Höhentrimmbereich einstellen ***(35)***.

10 Neutralpunkt und Schwerpunktslage

Der bereits eingeführte Begriff des Neutralpunktes und seine Bedeutung sollen nun näher beleuchtet werden. Dazu nehme man an, daß sich die Schwerpunktslage h unter sonst gleichbleibenden Bedingungen beliebig ändern können soll. Durch günstige Wahl dieser Position kann $\partial c_{M,cg} / \partial \alpha_a < 0$ gesichert werden. Weiterhin gibt es eine Anordnung, bei der gilt: $\partial c_{M,cg} / \partial \alpha_a = 0$. Dieser Wert für h wird als Lage des Neutralpunktes h_N des gesamten Flugzeuges definiert (***Abb.20***).

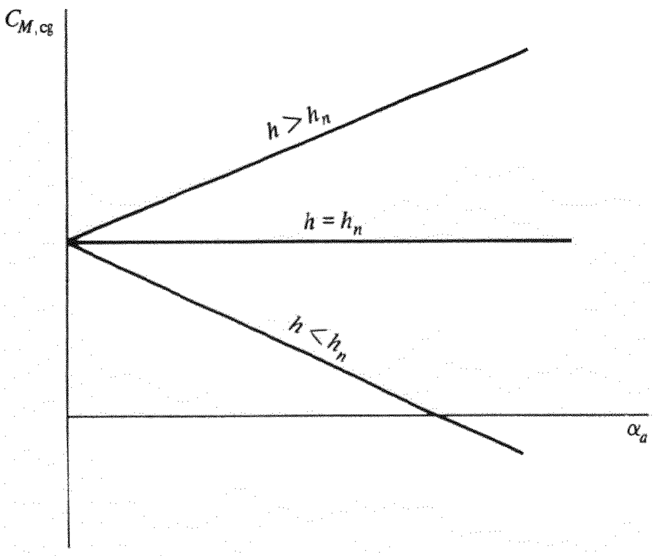

Abb.20 Einfluß der Lage des Schwerpunktes auf die Längsstabilität

Löst man Gleichung ***(36)*** für $\partial c_{M,cg} / \partial \alpha_a = 0$ nach h auf, so erhält man h_N .

$$h_N = h_{ac,WB} + V_H \frac{a_t}{a} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right) \tag{37}$$

Für ein gegebenes Flugzeug ist diese Gleichung konstant und damit der Neutralpunkt eine festliegende nur von der Geometrie abhängige Größe.

Die Schwerpunktslage h werde beispielsweise von der Flügelvorderkante aus angetragen. Wenn $h < h_N$, so liegt der Schwerpunkt vor dem Neutralpunkt. Das ist eine alternative Formulierung des Kriteriums für statische Längsstabilität, das sich zudem leicht erklären läßt.

In ausgetrimmter Fluglage befindet sich der Schwerpunkt an dem Ort, um den das aerodynamische Moment null ist. Dieser wird auch Druckpunkt genannt und ist in seiner Lage nicht konstant. Das konstante Moment um den Neutralpunkt muß nunmehr gleich dem Auftrieb multipliziert mit dem Abstand zwischen Druck- und Neutralpunkt als Hebelarm sein. Kommt es nun zu einer Abweichung hin zu einer überzogenen Fluglage [***Abb.13(b)***], so wird der Auftrieb mit dem Anstellwinkel wachsen. Um das Neutralpunktsmoment konstant zu halten, muß sich nun der Hebelarm des Druckpunktes verkürzen, er muß also nach hinten wandern, wodurch das Flugzeug kopflastig wird und sich in seine ursprüngliche Fluglage zurückbewegt.

11 Statische Reserve

Löst man Gleichung ***(37)*** nach $h_{ac,WB}$:

$$h_{ac,WB} = h_N - V_H \frac{a_t}{a}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \qquad \textbf{\textit{(38)}}$$

und kombiniert sie mit ***(36)***, so ergibt sich:

$$\frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha_a} = a(h - h_N) \qquad \textbf{\textit{(39)}}$$

oder umgestellt auch:

$$\frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha_a} = -a\,(h_N - h) \qquad \textbf{\textit{(40)}}$$

Der Ausdruck *(h_N - h)* wird auch *statische Reserve* genannt (***Abb.21***).

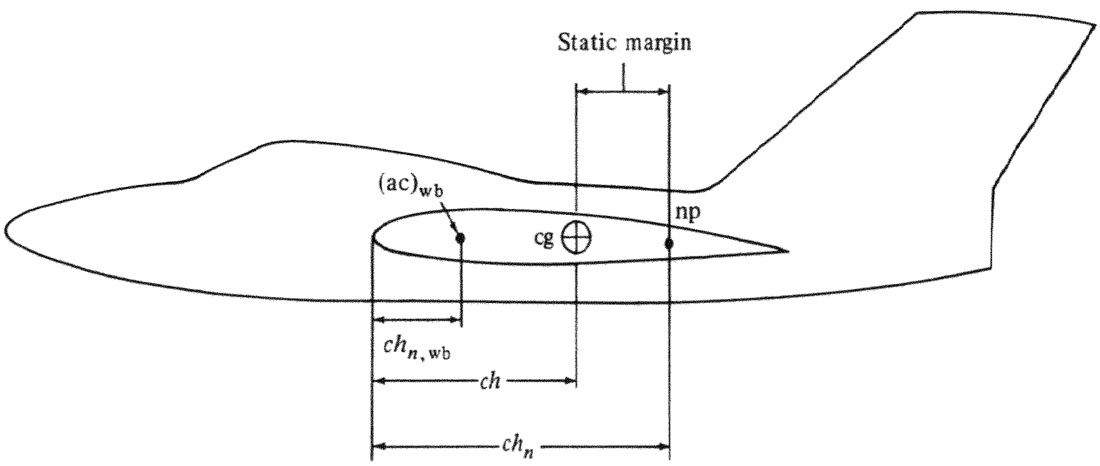

Abb.21 Darstellung der statischen Reserve

Gl. ***(40)*** zeigt, daß diese statische Reserve ein direktes Maß für die Längsstabilität ist. Ihr Wert muß positiv sein (vgl. hierzu Kapitel **10**). Ihre Erhöhung führt zur Verbesserung der Flugstabilität. Wird sie jedoch zu groß gewählt, so kann das die Steuerbarkeit beeinträchtigen und den Flugleistungen abträglich sein, da am Leitwerk viel negativer Auftrieb erzeugt wird und durch denTragflügel wieder kompensiert werden muß.

12 Konzept der statischen Längssteuerung

Nach der Behandlung der Flugstabilität sollen nun Probleme der Flugsteuerung erörtert werden. Ein statisch stabiles Flugzeug befinde sich in einer getrimmten Fluglage. Es fliegt dann mit dem Trimmwinkel α_e, der mit einem entsprechenden Auftriebskoeffizienten $c_{L,trim}$ und der zugehörigen Fluggeschwindigkeit V_{trim}.

$$V_{trim} = \sqrt{\frac{2W}{\rho_\infty S\, c_{L,trim}}} \tag{41}$$

Nun soll das Flugzeug eine geringere Geschwindigkeit $V_\infty < V_{trim}$ einnehmen. Bei niedrigerer Geschwindigkeit nimmt der dynamische Druck ab, deshalb müssen der Auftriebskoeffizient und mithin der Anstellwinkel ansteigen, damit der Auftrieb das Gewicht noch tragen kann.

Aus ***Abb.12*** kann jedoch leicht entnommen werden, daß dann das Nickmoment negativ wird, das Flugzeug würde sich also in den Sinkflug begeben und versuchen, Geschwindigkeit aufzunehmen, um sich in die ursprüngliche Fluglage zurückzubegeben.

Dieses Problem kann nur durch eine Veränderung der Kurve für den Momentenbeiwert gelöst werden (***Abb.22***).

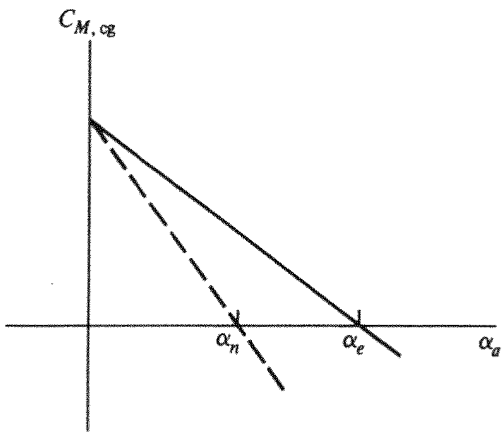

Abb.22 Änderung des Trimmanstellwinkels durch Änderung des Anstiegs der Momentenkurve

In ***Abb.22*** würde der neue Anstellwinkel α_n durch eine Änderung des Anstieges $\partial c_{M,cg} / \partial \alpha_a$ eingestellt werden. Diese Vorgehensweise würde aber nach den Gln. ***(39)*** und ***(40)*** eine Verschiebung des Schwerpunktes erfordern. Eine solche *Laufgewichtstrimmung* ist aber nur bei Hängegleitern üblich, wo der Flieger seine Körperlage ändert, sowie bei einigen Überschallflugzeugen, wo große Trimmwinkelbereiche durch Umpumpen von Kraftstoff realisiert werden können.

Die Alternativvariante ist eine Parallelverschiebung der Kurve $c_{M,0}(\alpha_a)$ gemäß ***Abb.23***, was durch einen Höhenruderausschlag erreicht wird. Mit Hilfe des Höhenruders ist es also möglich, die Geschwindigkeit für den getrimmten Flugzustand zu steuern.

In ***Abb.24*** ist ein Höhenleitwerk in Nullstellung ohne Ausschlag des Höhenruders dargestellt.

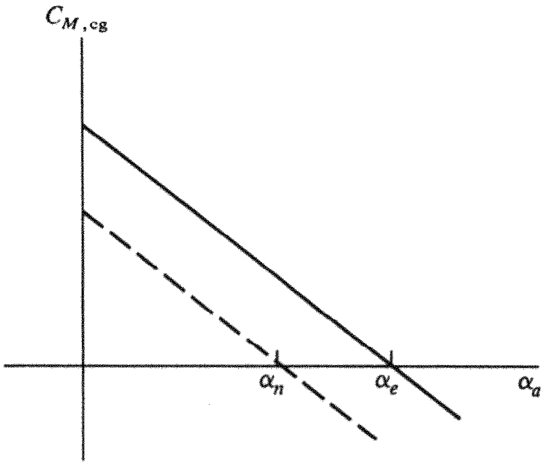

Abb.23 Änderung des Trimmanstellwinkels durch Änderung des Momentes bei Nullanstellung

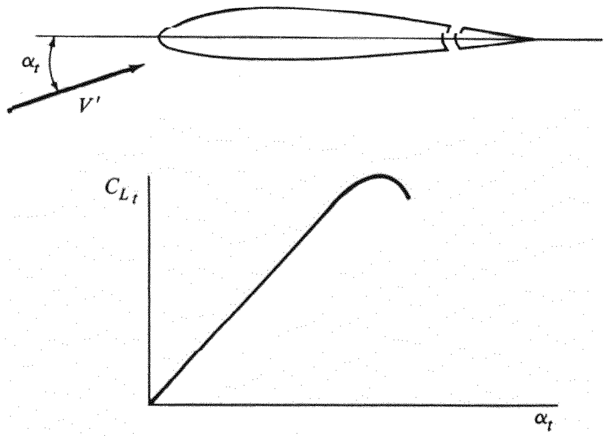

Abb.24 Leitwerkaufriebskoeffizient ohne Höhenruderausschlag

Der absolute Anstellwinkel des Höhenruders sei α_t. Die Abhängigkeit des Auftriebskoeffizienten von α_t ist ***Abb.24*** zu entnehmen. Wenn aber Höhenruderausschläge δ_e bei konstantem $(\alpha_t)_1$ angenommen werden, so ändert sich der Auftriebskoeffizient, er behält aber weitestgehend seinen Anstieg über α_t bei (***Abb.25***).

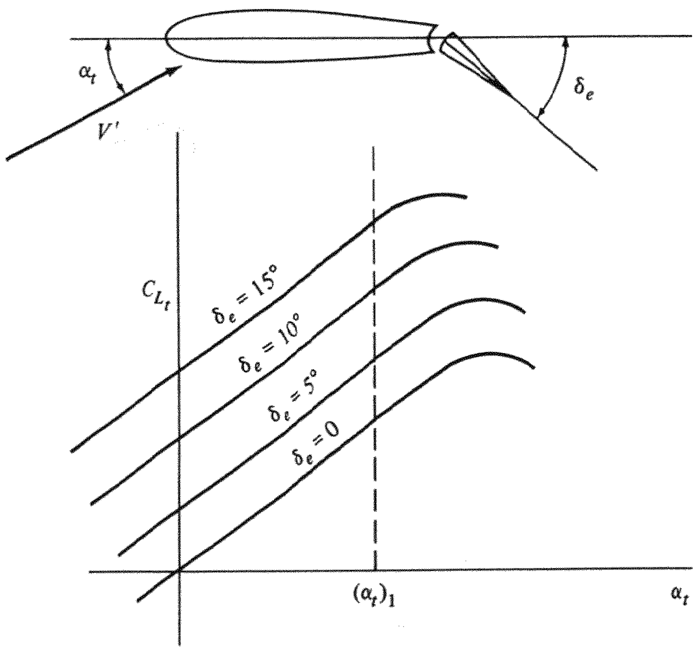

Abb.25 Leitwerkaufriebskoeffizient mit Höhenruderausschlag

Diese Abhängigkeit kann als $c_{L,t}$ über δ_e aufgetragen werden (***Abb.26***).

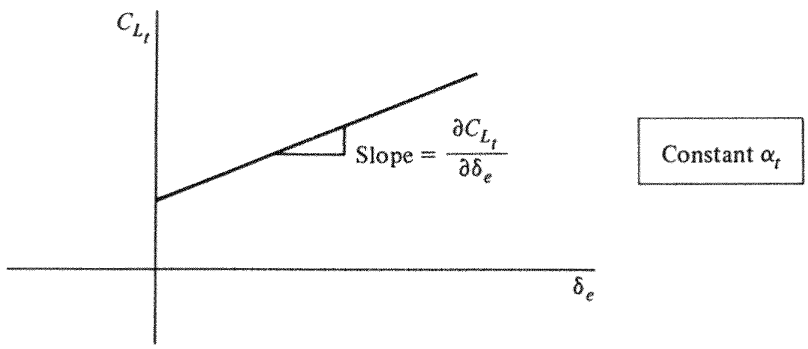

Abb.26 $c_{L,t}$ über δ_e bei konstantem α_t

Im allgemeinen hat diese Kurve einen nahezu konstanten positiven Anstieg, das heißt, ein Ruderausschlag nach unten bewirkt eine Auftriebszunahme, die *Höhenruderwirkungsgrad* genannt werden kann und ein direktes Maß für die Stärke des Höhenruders als Steuerorgan ist.

Somit gilt für den Höhenleitwerksauftriebskoeffizienten:

$$c_{l,t} = \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \alpha_t} \alpha_t + \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \delta_e} \delta_e = a_t \alpha_t + \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \delta_r} \delta_e \qquad \textbf{(42)}$$

Einsetzen von ***(42)*** in ***(32)*** beschreibt das Nickmoment mit:

$$c_{M,cg} = c_{M,ac,WB} + c_{L,WB}(h - h_{ac}) - V_H \left(a_t \alpha_t + \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \delta_e} \delta_e \right) \qquad \textbf{(43)}$$

Hieraus ist ersichtlich, inwieweit Höhenruderausschläge die Momentenbilanz um den Schwerpunkt beeinflussen. Durch Ableitung nach δ_e kann der Einfluß des Höhenruders allein erhalten werden:

$$\frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \delta_e} = -V_H \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \delta_e} \qquad \textbf{(44)}$$

Nach ***Abb.26*** ist dieser Anstieg genauso konstant wie V_H für eine gegebene Flugzeuggeometrie. Somit kann die Änderung des Gesamtmomentenbeiwertes für einen bestimmten Ruderausschlag angegeben werden:

$$\Delta c_{M,cg} = -V_H \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e \qquad \textbf{(45)}$$

Abb.27 gibt eine Erklärung für Gleichung ***(45)*** und erfüllt die Forderung aus ***Abb.23***. Ein als positiv definierter Ausschlag des Höhenruders nach unten bewirkt einen kleineren Anstellwinkel α_{trim}, was zu einem geringeren Auftriebsbeiwert und damit zu einer erhöhten Fluggeschwindigkeit führt.

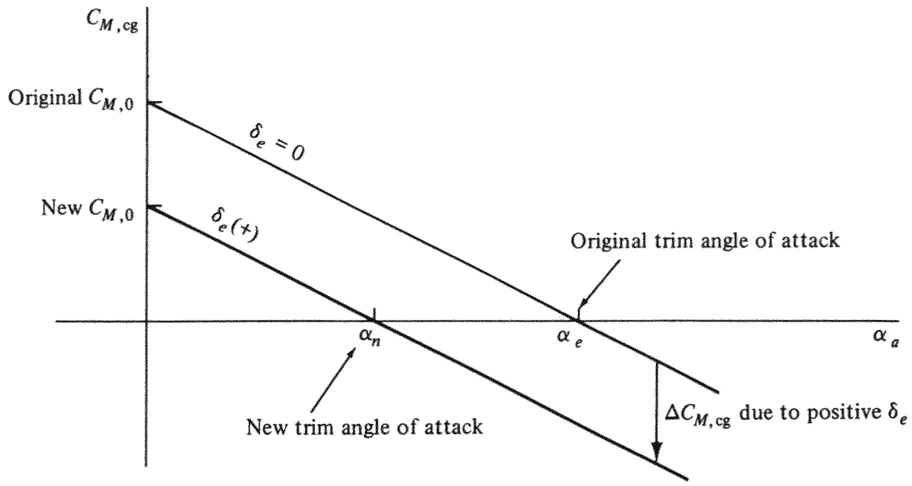

Abb.27 Einfluß des Höhenruderausschlages auf den Momentenkoeffizienten

Abb.28 zeigt nun die Höhenruderausschläge für die beiden Grenzfälle V_{min} und V_{max}.

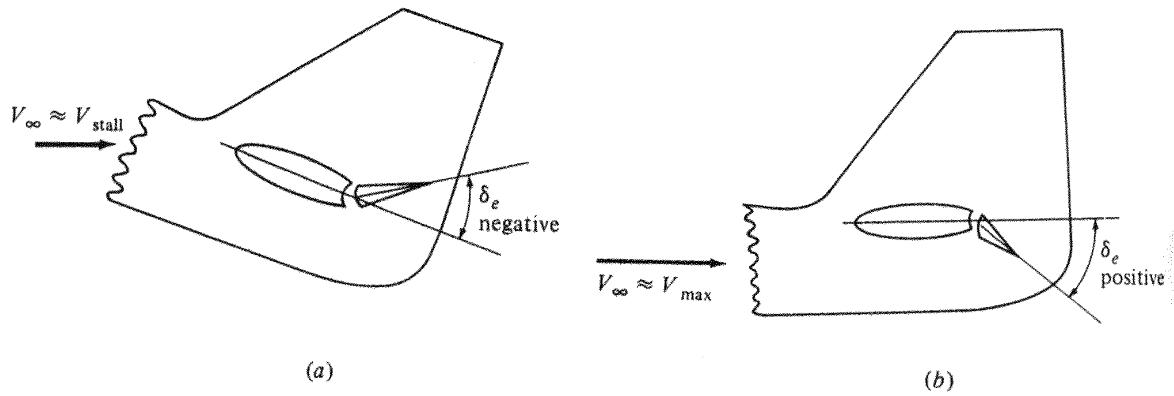

Abb.28 Höhenruderausschlag zur Trimmung für *(a)* Langsamflug und *(b)* Schnellflug

13 Berechnung des Höhenrudertrimmwinkels

Der Wert für δ_e zur Einstellung eines neuen Anstellwinkels $\alpha_n \neq \alpha_e$ soll nun berechnet werden. Unter Beachtung einfacher Zusammenhänge aus der analytischen Geometrie läßt sich für die durchgezogene Linie in ***Abb.29*** leicht eine Gleichung angeben:

$$c_{M,cg} = c_{M,ac} + \frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha_a} \alpha_a \tag{46}$$

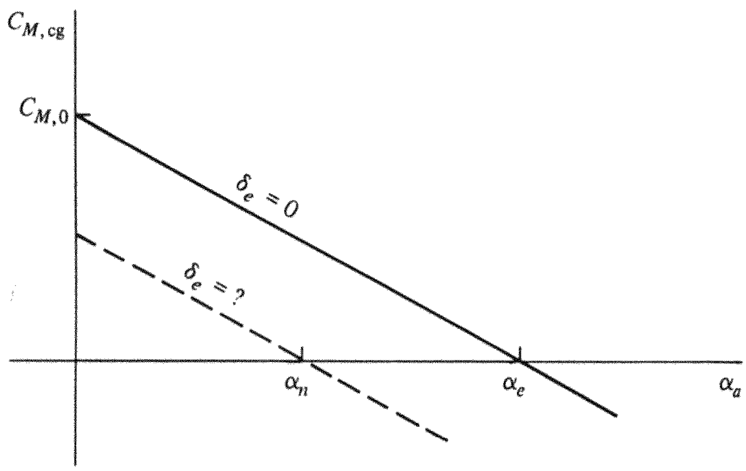

Abb.29 Berechnung eines neuen Höhenruderausschlages

Gegeben sei der Anstellwinkel, der sich ohne Höhenruderausschlag einstellt. Wie groß muß der Höhenruderausschlag sein, um einen neuen Anstellwinkel zu erreichen?

Nunmehr wird das Höhenruder um den Winkel δ_e ausgelenkt, somit muß Gleichung ***(46)*** um ein $\Delta\, c_{M,cg}$ ergänzt werden.

$$c_{M,cg} = c_{M,ac} + \frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha_a} \alpha_a + \Delta\, c_{M,cg} \tag{47}$$

Mit Gleichung ***(45)*** entsteht:

$$c_{M,cg} = c_{M,ac} + \frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha_a} \alpha_a - V_H \frac{\partial c_{L,t}}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e \tag{48}$$

Für einen neuen Trimmwinkel δ_{trim}, bei dem $c_{M,cg} = 0$ sowie $\alpha_a = \alpha_n$ liefert Gleichung ***(48)***:

$$0 = c_{M,0} + \frac{\partial\, c_{M,cg}}{\partial \alpha_a}\, \alpha_n - V_H\, \frac{\partial\, c_{L,t}}{\partial \delta_e}\, \Delta\delta_{trim} \qquad \textbf{\textit{(49)}}$$

und damit wird der Zuwachs des Trimmwinkel $\Delta\delta_{trim}$:

$$\Delta\delta_{trim} = \frac{c_{M,0} + \dfrac{\partial\, c_{M,cg}}{\partial \alpha_a}\, \alpha_n}{V_H\, \dfrac{\partial\, c_{L,t}}{\partial \delta_e}} \qquad \textbf{\textit{(50)}}$$

Gl.***(50)*** gibt den Höhenruderausschlag an, der notwendig ist, um das Flugzeug für einen neuen Anstellwinkel α_n zu trimmen. Alle in dieser Gleichung benötigten Größen sind durch die geometrische Auslegung gegeben und können entweder direkt abgenommen oder durch Windkanal– bzw. Freiflugversuche gewonnen werden.

14 Knüppelfeste und knüppelfreie Längsstabilität

Bisher wurde das Flugzeug als starre Konfiguration im Leitwerksbereich angenommen. Die Höhenruder seien auf ihren Ausschlagwinkel δ_e festgelegt. Der Steuerknüppel müßte dann in seiner Position fixiert werden. Als Konsequenz daraus kann man von *knüppelfester statischer Längsstabilität* sprechen.

Moderne Hochgeschwindigkeitsflugzeuge haben hydraulisch oder elektrisch angetriebene sogenannte nicht umkehrbare Steuerungen, die derartige Flugzustände erlauben. Kleinflugzeuge mit rein manueller Ruderbetätigung über Drahtseile hingegen würden dann einen konstanten Ruderdruck am Steuerknüppel erfordern, was als unkomfortabel empfunden würde. Daher läßt man den Steuerknüppel im Geradeausflug üblicherweise los. Als Folge wird sich das Ruder den aerodynamischen Einflüssen folgend frei bewegen. Es muß also eine Konfiguration gefunden werden, die auch in diesem Fall stabil fliegt, man kann dann von *knüppelfreier statischer Längsstabilität* sprechen.

15 Moment am Höhenruder

Es wird nun ein Höhenleitwerk angenommmen, dessen Ruder innerhalb des konstruktiv vorgegebenen Bereiches um seine Aufhängung rotieren kann. ***Abb.30(a)*** zeigt ein solches Leitwerk ohne Anstellwinkel. Die Druckverteilung um Flosse und Ruder ist symmetrisch und daher ist auch das Moment um die Aufhängung null.

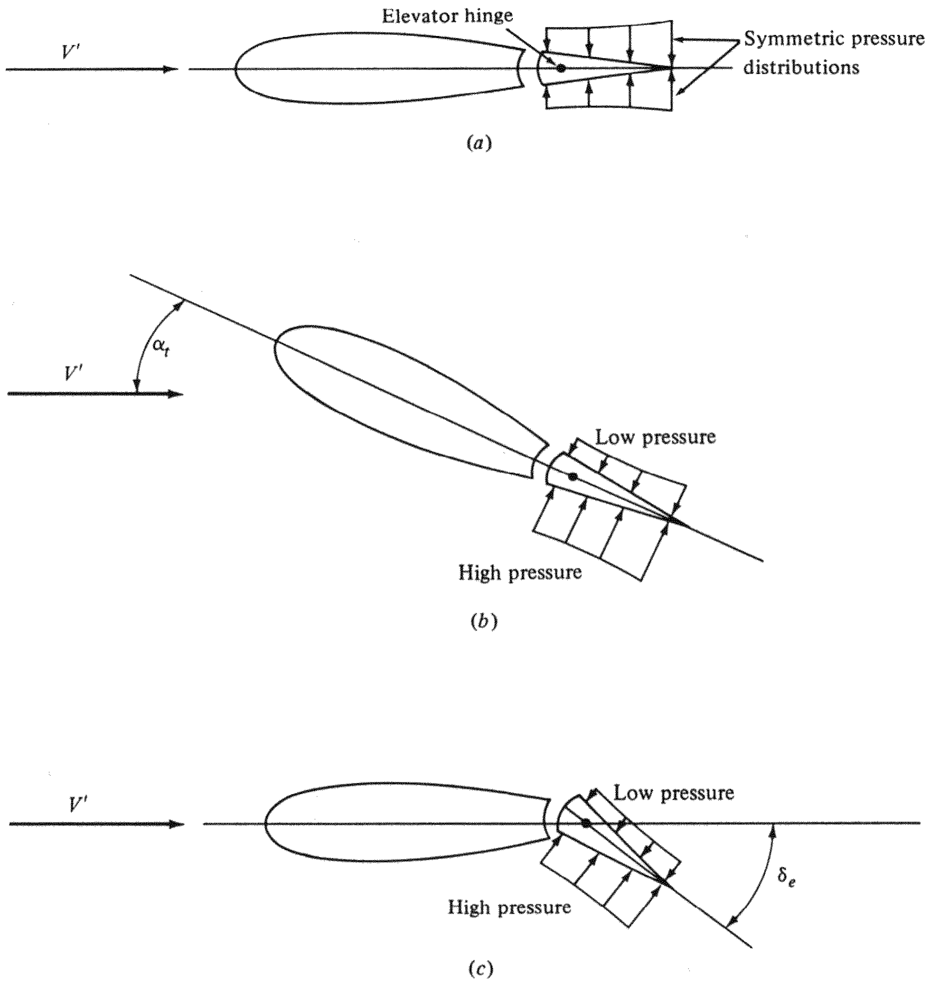

Abb.30 Aerodynamische Herkunft des Höhenrudermomentes

(a) kein Moment

(b) Moment bei Anstellwinkel

(c) Moment bei Ruderausschlag

Wird das Höhenleitwerk als Ganzes mit einem Anstellwinkel α_t angeströmt, während der Ruderausschlag $\delta_e = 0$ bleibt, so kommt es zu einer unsymmetrischen Druckverteilung über die gesamte Sehnenlänge, woraus ein Moment um die Ruderachse folgt [***Abb.30(b)***]. Letztlich kann bei Anstellwinkel null das Ruder ausgeschlagen werden. Dann ändert das Profil seine Krümmung, was wiederum zu unsymmetrischer Druckverteilung und einem Moment führt.

Im Allgemeinen rufen Anstellwinkel α_t und Ruderausschläge δ_e, also alle Zustände, in denen das Leitwerk Auftrieb liefert, Momente um die Lagerachse des Höhenruders hervor. Dieses Moment ist ein wichtiger Parameter für den Fall *knüpperfreier* Stabilität, es wird hier mit H_e bezeichnet.

In ***Abb.31*** ist c_t die Sehnenlänge des Höhenleitwerkes insgesamt, mit c_b und c_e werden die Abstände von der Vorderkante des Ruders bis zur dessen Lagerachse bzw. von letzterer zur Hinterkante bezeichnet. Die Fläche des Ruders ist S_e .

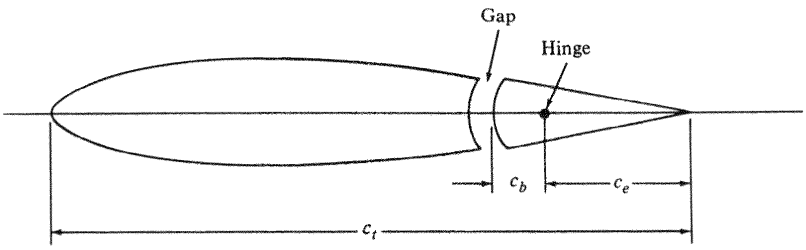

Abb.31 Geometrie und Bezeichnungen für das Höhenrudermo-

Somit kann der Höhenrudermomentenkoeffizient c_{he} definiert werden:

$$c_{he} = \frac{H_e}{\frac{\rho_\infty}{2} V_\infty^2 \, S_e \, c_e} \tag{51}$$

Er ist, wie das Moment selbst, eine Funktion des Anstellwinkels und des Ruderausschlages. Man kann daher die partiellen Ableitungen zum totalen Differential zusammenfassen:

$$c_{he} = \frac{\partial c_{he}}{\partial \alpha_t} \alpha_t + \frac{\partial c_{he}}{\partial \delta_e} \delta_e \tag{52}$$

wobei die Anstiege sowohl im Unter– als auch im Überschallbereich nahezu konstant bleiben. Sie werden meist noch auf empirischem Wege ermittelt, da sie von neben der Geometrie noch von vielen weiteren Umständen abhängen. Sie sind sehr empfindlich gegen Grenzschichtablösung, was Windkanaluntersuchungen unumgänglich macht.

16 Längsstabilität bei freiem Steuerknüppel

Erlaubt man dem Höhenruder, sich frei um seine Achse zu bewegen, so wird es sich in eine Gleichgewichtsposition begeben, in der das Moment H_e gleich null ist. Ein so gesteuertes Flugzeug befinde sich im Horizontalflug, der durch eine Windböe gestört wird. Das Höhenruder wird in diesem Moment seine Position nicht beibehalten, wodurch sich das Stabilitätsverhalten ändert. Im allgemeinen führt das dazu, daß Flugzeuge bei losgelassenem Steuerknüppel weniger stabil sind, als wenn die Ruderausschläge festgehalten werden. Für die Auslegung der Konstruktion ist es wünschenswert, daß der Unterschied gering gehalten wird.

Nach ***(52)*** ergibt sich der Ausschlagwinkel eines freigelassenen Höherruders zu:

$$c_{he} = 0 = \frac{\partial c_{he}}{\partial \alpha_t}\alpha_t + \frac{\partial c_{he}}{\partial \delta_e}\delta_{frei} \qquad \textbf{\textit{(53)}}$$

und daraus entsteht:

$$\delta_{frei} = -\frac{\dfrac{\partial\, c_{he}}{\partial \alpha_t}}{\dfrac{\partial\, c_{he}}{\partial \delta_e}}\alpha_t \qquad \textbf{\textit{(54)}}$$

Der Winkel δ_{frei} ist also von α_t abhängig. Offensichtlich beeinflußt es den Leitwerkauftriebskoeffizienten, der wiederum für die Längsstabilität von essentieller Bedeutung ist. Man kann ein $c'_{A,L}$ bei losgelassenem Höhenruder bestimmen:

$$c'_{L,t} = a_t\,\alpha_t + \frac{\partial\, c_{L,t}}{\partial \delta_e}\delta_{frei} \qquad \textbf{\textit{(55)}}$$

Die Kombination von ***(54)*** und ***(55)*** ergibt:

$$c'_{L,t} = a_t\,\alpha_t - \frac{\partial\, c_{L,t}}{\partial \delta_e}\,\frac{\dfrac{\partial\, c_{he}}{\partial \alpha_t}}{\dfrac{\partial\, c_{he}}{\partial \delta_e}}\alpha_t \qquad \textbf{\textit{(56)}}$$

oder

$$c'_{L,t} = a_t \, \alpha_t \, F \qquad \textbf{\textit{(57)}}$$

mit F als Faktor für frei bewegliches Höhenruder, definiert als:

$$F = 1 - \frac{1}{a_t} \, \frac{\partial \, c_{L,t}}{\partial \delta_e} \, \frac{\dfrac{\partial \, c_{he}}{\partial \alpha_t}}{\dfrac{\partial \, c_{he}}{\partial \delta_e}} \qquad \textbf{\textit{(58)}}$$

Dieser Faktor liegt üblicherweise in der Größenordnung zwischen *0.7* und *0.8* und bedeutet eine Abminderung des Beitrages des Höhenleitwerkes zur Flugstabilität.

Diese Auswirkung läßt sich durch die Momentenbilanz um den Schwerpunkt ausdrücken, indem $c'_{L,t}$ eingesetzt und $c'_{M,cg}$ bestimmt wird.

$$c'_{M,cg} = c_{M,ac,WB} + c_{L,WB} \, (h - h_{ac,WB}) - V_H \, a_t \, \alpha_t \, F \qquad \textbf{\textit{(59)}}$$

Diese Gleichung beschreibt nunmehr eine endgültige Form des Momentenkoeffizienten um den Schwerpunkt eines Flugzeuges mit frei beweglichem Höhenruder.

Mit Hilfe von Gl.***(59)*** ist es nunmehr möglich, die gleiche Analyse wie in Kapitel **9** durchzuführen, um Gleichungen für die *knüppelfreie* Längsstabilität herzuleiten.

$$(c_{M,0})' = c_{M,ac,WB} + F \, V_H \, a_t \, (i_t + \varepsilon_0) \qquad \textbf{\textit{(60)}}$$

$$h'_N = h_{ac,WB} + F \, V_H \, \frac{a_t}{a} \left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \qquad \textbf{\textit{(61)}}$$

$$\frac{\partial c_{M,cg}}{\partial \alpha} = -\, a \, (h'_N - h) \qquad \textbf{\textit{(62)}}$$