

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120

Sommersemester 2016

3. Kurz-Lösungen für die Woche 25.04. - 01.05.2016

Unendliche Reihen

Ü14 (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1} + 2(-7)^n}{11^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{11}\right)^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{11}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{11}} + \frac{2}{1+\frac{7}{11}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{8} + \frac{11}{9} = \frac{121}{72}.$

(c) $\frac{1+8\frac{n}{3}}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-2}} + 4 > 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Folglich ist die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium nicht konvergent.

Ü15 (b) (i) Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$:

$$0 \leq \frac{k-2}{k^4+2} < \frac{k}{k^4} = \underbrace{\frac{1}{k^3}}_{=:b_k},$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent ist (sogar absolut), folgt nach Vergleichskriterium, dass

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k^4+2}$ ebenfalls (absolut) konvergiert.

(iii) $\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{k+7\sqrt{k}}{k^3-k}}_{=:c_k}$. Es gilt $0 < c_k < \frac{8k}{k(k^2-1)} = \frac{8}{k^2-1} < \frac{8}{k^2-\frac{k^2}{2}} = \frac{16}{k^2}$ für $k > 1$,

und die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{16}{k^2} = 16 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist (absolut) konvergent. Folglich ist nach Vergleichskriterium auch $\sum_{k=2}^{\infty} c_k$ (absolut) konvergent.

H17 (a) Es gilt wegen absoluter Konvergenz der Einzelreihen auf der rechten Seite:

$$\sum_{k=0, m=0}^{\infty} \frac{3}{k!} \cdot \frac{1}{5^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^m = \frac{3e}{1-\frac{1}{5}} = \frac{15}{4} \cdot e.$$

(b) (i) $\frac{2^{n-1}+7^n}{2^{n+1}+7^{n+1}} = \frac{7^n}{7^n} \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{2\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}+7} \rightarrow \frac{1}{7}$ für $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ keine Nullfolge, nicht konvergent.

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+3^{k+1}}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5^k} + 3\left(\frac{3}{5}\right)^k\right) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} + \frac{3}{1-\frac{3}{5}} = 10.$

(iii) Es gilt, da die Einzelreihen auf der rechten Seite konvergent sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4^k}{6^k} - \frac{10}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 10 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 10e = 3 - 10e.$$

H18 Bandlänge zu Beginn: $L_0 = 100$ cm. Schneckenstrecke nach n-tem Tag sei mit l_n bezeichnet. Dann gilt (in cm):

$$\begin{aligned} l_0 &= 1 \\ l_1 &= l_0 \cdot \frac{2}{1} + 1 \quad \text{Der Faktor } 2/1 \text{ gibt die Dehnung der Strecke über Nacht an, der Summand } +1 \text{ die neue Laufstrecke} \\ l_2 &= l_1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \\ l_3 &= l_2 \cdot \frac{4}{3} + 1 \\ &\vdots \\ l_n &= l_{n-1} \cdot \frac{n+1}{n} + 1. \end{aligned}$$

Mit der Teleskopmethode bekommt man die explizite Formel: $l_n = l_0(n+1) + (n+1) \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$.

Die Bandlänge ist nach n Tagen auf $L_n = (n+1)L_0$ angewachsen.

Frage war: Kann die Schnecke in endlicher Zeit das Ende des Bandes erreichen?

Mit anderen 'Worten':

$$\exists n \in \mathbb{N} : l_n \geq L_n ?$$

Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\exists n \in \mathbb{N} : l_0 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \geq L_0 .$$

Da die Folge der Partialsummen der harmonische Reihe unbeschränkt ist, gibt es ein solches n .
Folglich erreicht die Schnecke das Ende des Bandes nach endlicher Zeit. Diese Zeitspanne ist jedoch sehr lang.