Miniquiz: Funktionen

1. Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{5^k} \cdot (1-x)^k$. Vervollständigen Sie die nachfolgenden Aussagen!

   - Der Mittelpunkt der gegebenen Potenzreihe lautet $x_0 = 1$
     Bitte beachten, dass die Potenzreihe zunächst in die Standardform $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ umgeformt werden muss. Im hier vorliegenden Fall bedeutet das also:
     $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{5^k} \cdot (1-x)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} \cdot (x-1)^k$$

   - Der Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe ist $r = 5/2$
     Der Konvergenzradius kann zum Beispiel wie folgt berechnet werden
     $$r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{2}{5}\right)^k}} = \frac{5}{2}.$$

   - Geben Sie – ausgehend von Ihren Antworten auf die ersten beiden Fragen – ein möglichst großes Intervall I an, sodass die Potenzreihe für alle $x \in I$ konvergiert:
     $$I = (x_0 - r, x_0 + r) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

   - ($\star$) Die Potenzreihe ☐ konvergiert / ☒ divergiert am linken Randpunkt des Konvergenzintervalls und sie ☐ konvergiert / ☒ divergiert am rechten Randpunkt des Konvergenzintervalls.
     Für den linken Randpunkt $x = -3/2$ erhält man
     $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$
     und diese Reihe ist nicht konvergent (weil die zugehörige Folge der Partialsummen zwei Häufungspunkte besitzt). Für den rechten Randpunkt $x = 7/2$ erhält man
     $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{5^k} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$
     und diese Reihe ist nicht konvergent (z.B. nach Nullfolgenkriterium).

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☒ f ist eine stetige Funktion.
Richtig. Jede differenzierbare Funktion ist automatisch auch stetig.

☐ Wenn $f'(x_0) = 0$ erfüllt ist, dann befindet sich an der Stelle x_0 entweder ein Minimum oder ein Maximum der Funktion f.
Falsch. Die Bedingung $f'(x) = 0$ sichert im Allgemeinen noch nicht, dass an der zugehörigen Stelle ein Minimum oder Maximum liegt. Betrachtet man zum Beispiel die Funktion $f(x) = x^3$, so gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ erfüllt ist. Allerdings befindet sich an der Stelle $x = 0$ weder ein Minimum noch ein Maximum von f.

☐ Die Taylorreihe von f konvergiert gegen die Funktion f.
Falsch. Damit das gilt, müsste man noch zusätzlich voraussetzen, dass die Folge der Restglieder gegen Null konvergiert.

3. Bestimmen Sie die nachfolgenden Grenzwerte!

- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\cos(x)}{2x} = -\infty$
  Hier wurde ein Mal die Regel von L'Hopital angewendet, da dort ein Bruch der Form $0/0$ vorlag.
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3}{(\ln(x))^2} = \infty$
  Hier strebt der Nenner gegen 0 , wohingegen der Zähler gegen 1 strebt. Der Grenzwert lässt sich also direkt angeben; die Regel von L'Hopital darf nicht angewendet werden!
- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{e^{\ln(x)}} \cdot (e^x - 1) = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{e^x}{1} = 1$
  Zunächst vereinfacht man die Aufgabe, indem man $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$ nutzt. Danach liegt ein Bruch der Gestalt $0/0$ vor, dessen zugehörigen Grenzwert man mit einmaliger Anwendung der Regel von L'Hopital angeben kann.
- $(\star)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x) + x}{\cos(x) + x} = 1$
  Zähler und Nenner streben jeweils gegen unendlich, weil $\sin(x) + x \geq x - 1$ und $\cos(x) + x \geq x - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Dennoch darf man hier nicht die Regel von L'Hopital benutzen, weil dann im Zähler der Term $\cos(x) + 1$ und im Nenner der Term $-\sin(x) + 1$ entstehen, die jeweils für $x \to \infty$ keinen Grenzwert besitzen. Es ist aber trotzdem möglich, hier einen Grenzwert auszurechnen, z.B. mit dem Quetschlemma. Dazu stellen wir fest, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $-1 + x \leq \sin(x) + x \leq 1 + x$ und $-1 + x \leq \cos(x) \leq 1 + x$ gelten. Damit erhält man
  $$\underbrace{\frac{-1 + x}{1 + x}}_{\to 1} \leq \frac{\sin(x) + x}{\cos(x) + x} \leq \underbrace{\frac{1 + x}{-1 + x}}_{\to 1},$$

d.h. obere und untere Schrankenfunktion haben denselben Grenzwert, damit strebt auch die zu untersuchende Funktion gegen 1*.*

4. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$. Vervollständigen Sie die nachstehenden Aussagen!

   - Der maximale Definitionsbereich von f ist $D(f) = (0, \infty)$
     Es muss lediglich darauf geachtet werden, dass die Logarithmusfunktion für $x \leq 0$ *nicht definiert ist.*
   - Die Ableitung von f lautet $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$
   - An der Stelle $x_0 = 1/e$ befindet sich ein ⊠ Minimum / ☐ Maximum von f.
     Die erste Ableitung ist genau dann Null, wenn $x = 1/e$ *gilt. Mit Hilfe der zweiten Ableitung* $f''(x) = 1/x$ *lässt sich dann feststellen, dass an dieser Stelle ein Minimum liegt.*
   - Berechnen Sie das Integral $\int_1^e f'(x)\,\mathrm{d}x = f(e) - f(1) = e$
     Wir kennen bereits eine Stammfunktion der Funktion f'*, daher lässt sich das Integral leicht mit Hilfe des Hauptsatzes der Integral und Differentialrechnung lösen.*