

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120

Sommersemester 2016

12. Übungsblatt für die Woche 04.07. - 10.07.2016

Algebraische Strukturen

Begriffe: Halbgruppe, Monoid, Gruppe, neutrales Element, Inverses, Unter(halb)gruppe

Ü67 (a) Untersuchen Sie für die folgenden zwei Strukturen, ob sie eine Halbgruppe, ein Monoid oder sogar eine Gruppe bilden.

(i) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$ mit $x \circ y := x \cdot |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(ii) Menge $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$ mit der Matrizenmultiplikation.

(b) Es sei $A = \{a, b, c\}$ und $M = A^A = \{f : A \rightarrow A\}$. Es werden die Abbildungen

$f : A \rightarrow A$ mit $f(a) = a, f(b) = f(c) = b$ und $g : A \rightarrow A$ mit $g(a) = b, g(b) = g(c) = a$

betrachtet. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{f, g\}$ von M mit der Hintereinanderausführung $\circ$ ein Monoid bildet. Ist dies ein Untermonoid des Monoids $(M, \circ)$?

Ü68 (a) Beweisen Sie: Eine Gruppe $(G, \circ)$, in der jedes Element außer dem neutralen Element e die Ordnung 2 hat, ist abelsch.

(b) Bestimmen Sie die Menge U aller Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in der Gruppe $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $(U, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist. Stellen Sie dazu die Gruppentafel von U auf.

Finden Sie alle Elemente der Ordnung 2. Ist U zyklisch?

Ü69 Betrachtet wird die Gruppe $G := \mathbb{Z}_{10}^*$ der Einheiten von $\mathbb{Z}_{10}$ bzgl. der Multiplikation mod 10.

(a) Wie groß ist die Ordnung von G ?

(b) Stellen Sie die Gruppentafel von G auf, und geben Sie alle Untergruppen von G an.

(c) Ist G zu einer der Gruppen $(\mathbb{Z}_4, +)$ bzw. $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph? Begründen Sie!

A H70 Es wird die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_{14}^*$ von $\mathbb{Z}_{14}$ bzgl. der Multiplikation mod 14 betrachtet.

(a) Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}_{14}^*$? Stellen Sie die Gruppentafel von $\mathbb{Z}_{14}^*$ auf. Geben Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}_{14}^*$ an. Ist die Gruppe zyklisch?

(b) Ist sie zu $(\mathbb{Z}_6, +)$ isomorph? Geben Sie gegebenenfalls einen Isomorphismus an und weisen Sie nach, dass es sich um einen Isomorphismus handelt.

(c) Berechnen Sie 11^{-1} in $(\mathbb{Z}_{14}, \cdot)$ mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus. (Hinweis: Kontrolle ist leicht mit der Gruppentafel möglich.)

H71 Es bezeichne Σ^* die Menge aller endlichen Zeichenketten ("Wörter"), die sich aus dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$ zusammen mit dem leeren Wort ϵ bilden lassen. Als Operation $\circ$ auf Σ^* wird die Konkatenation der Wörter, erklärt durch $w_1 \circ w_2 := w_1 w_2$ für alle $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, betrachtet.

- (a) Zeigen Sie, dass $(\Sigma^*, \circ)$ ein Monoid ist, aber keine Gruppe.
- (b) Bestimmen Sie das durch die Menge $X = \{aa, bb\} \subset \Sigma^*$ erzeugte Untermonoid von Σ^* .
- (c) Beweisen Sie, dass die Abbildung $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, $w \mapsto |w|$, die jedem Wort seine Länge zuordnet, ein Homomorphismus von $(\Sigma^*, \circ)$ nach $(\mathbb{N}, +)$ ist. Ist f auch Epimorphismus, Monomorphismus oder gar Isomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort.

H72 Betrachtet wird die Gruppe $(G, \circ)$ mit $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und der Operation

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G,$$

mit den üblichen Additionen in $\mathbb{Z}_2$ bzw. $\mathbb{Z}_3$ in der 1. bzw. 2. Komponente.

- (a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe $(G, \circ)$ auf. Welche Ordnungen haben die Elemente dieser Gruppe? Gibt es erzeugende Elemente für G , d.h. solche $(x, y) \in G$, für die $\langle (x, y) \rangle = G$ gilt?
- (b) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$ ist (übliche Addition $+$ in $\mathbb{Z}_6$).