TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120 Sommersemester 2016

13. Übungsblatt für die Woche 11.07. - 17.07.2015

Algebraische Strukturen

Begriffe: Kongruenzrelation, Normalteiler, Faktor(halb)gruppe, Homomorphismus

Ü73 (a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ ist durch $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, 5)$ eine Äquivalenzrelation R definiert.

(i) Zeigen Sie, dass R alle Eigenschaften einer Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathbb{Z}, \cdot)$ erfüllt. Geben Sie die Elemente der Faktorhalbgruppe $(\mathbb{Z}/R, \cdot_R)$ an, und beweisen Sie, dass $\cdot_R$ eine Operation in $\mathbb{Z}/R$ ist (Repräsentantenunabhängigkeit).

(ii) Es läßt sich analog zu (i) zeigen, dass R eine Kongruenzrelation auf der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ ist. Finden Sie einen Normalteiler N in $(\mathbb{Z}, +)$, für den $(\mathbb{Z}/N, +_N) = (\mathbb{Z}/R, +_R)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation R, gegeben durch

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \text{ ist gerade}\},$$

eine Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist. Bestimmen Sie alle Elemente der Faktorhalbgruppe $\mathbb{Z}/R$. Stellen Sie die Verknüpfungstafel der zugehörigen Operation $\cdot_R$ auf.

Ü74 Gegeben ist die Gruppe $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$ mit der Verknüpfungstafel der Multiplikation mod 18 in $\mathbb{Z}_{18}^*$:

$\cdot$	1	5	7	11	13	17
1	1	5	7	11	13	17
5	5	7	17	1	11	13
7	7	17	13	5	1	11
11	11	1	5	13	17	7
13	13	11	1	17	7	5
17	17	13	11	7	5	1

(a) Zeigen Sie: Die Mengen $U_1 = \{1, 17\}$ und $U_2 = \{1, 7, 13\}$ bilden Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$. Begründen Sie, dass U_1 und U_2 sogar Normalteiler von $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$ sind.

(b) Geben Sie die Elemente der Faktorgruppen $\mathbb{Z}_{18}^*/U_i, i = 1, 2$ an und stellen Sie die zugehörigen Gruppentafeln auf.

Ü75 Die Menge $G := GL_n(\mathbb{R})$ der reellen regulären $n \times n$-Matrizen bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung φ von $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ auf $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, die durch

$$\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad A \mapsto \det A,$$

definiert ist, ein Homomorphismus von $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ auf $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist. Bestimmen Sie den Kern von φ und die Elemente der Faktorgruppe $GL_n(\mathbb{R})/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(b) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen den Gruppen $(GL_n(\mathbb{R})/\mathrm{Ker}(\varphi), \cdot)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ an.

A H76 Auf der Menge $\mathbb{Z}$ wird folgende Relation R betrachtet:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists\, k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x^k = y^l\right\},$$

(a) Beweisen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Beweisen Sie, dass R *keine* Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

H77 (a) Untersuchen Sie für die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, ob die Relation $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, die für beliebige $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch

$$(A, B) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \min(A) = \min(B)$$

definiert ist, eine Kongruenzrelation auf der Halbgruppe $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup)$ bildet.

(b) Es sei M eine endliche Menge mit Mächtigkeit $|M| = n$. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mit der symmetrischen Differenz $\triangle$ als Operation eine abelsche Gruppe bildet, die zur Gruppe $(\mathbb{Z}_2^n, +)$ isomorph ist.
Hinweis: Für $A, B \in \mathcal{P}$ ist $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Die Addition in $\mathbb{Z}_2$ ist die übliche Addition mod 2 und in $\mathbb{Z}_2^n$ ist die Addition entsprechend komponentenweise auszuführen.

H78 Gegeben sind folgende Permutationen aus der Symmetriegruppe $(S_5, \circ)$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie α, β, sowie $\alpha \circ \beta$, α^{-1}, β^{-1} und $(\beta \circ \alpha)^{-1}$ in Zyklenschreibweise an.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutationen α und β.

(c) Stellen Sie die Permutationen α und $\alpha \circ \beta$ als Produkt von Transpositionen dar.

(d) Bestimmen Sie die Untergruppen $< \alpha >$ und $< \beta >$ von $(S_5, \circ)$.