TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2016

2. Übungsblatt für die Woche 18.04. - 24.04.2016

Konvergenz von Zahlenfolgen

Begriffe: Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen, Rechenregeln für Grenzwerte, Quetschlemma

Ü7 Verwenden Sie geeignete Konvergenzkriterien oder Rechenregeln für konvergente Folgen, um die gegebenen reellen Zahlenfolgen auf Konvergenz zu untersuchen:

(a) $x_n = \dfrac{1-5n^5}{3n^5+n-3}$ (b) $x_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^{n+1}, n > 0,$ (c) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}.$

Ü8 Verwenden Sie Rechenregeln für konvergente Folgen, um die reellen Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz zu untersuchen und gegebenenfalls den Grenzwert zu bestimmen:

(a) $x_n = \left(1+\dfrac{3}{4n}\right)^n + \dfrac{(-1)^n}{3^n},\ n > 0,$ (b) $x_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n}\right)^{n-1},\ n > 0,$

(c) $x_n = \dfrac{3e^{2n}-e^n+1}{3-e^{3n}},$ (d) $x_n = \dfrac{2^n+3^{n+1}\cdot n^2}{3^n\cdot n^2} - 2\sqrt[n]{3},\ n > 0$

(e*) $x_n = \sqrt{n^2-n-1} - \sqrt{n^2+1},\ n > 1$ (mit Trick!).

Ü9 Verwenden Sie das Quetschlemma, um die reellen Zahlenfolgen

(a) $x_n = \sqrt[n]{6+n^{-1}}, n > 0,$ (b) $x_n = \dfrac{2n+1}{(n-1)^2}\sin\left(\dfrac{n}{2}\right),\ n > 1,$ (c) $x_n = \sqrt[n]{n+2}$

auf Konvergenz zu untersuchen und gegebenenfalls ihren Grenzwert zu berechnen.

A H10 Nutzen Sie geeignete Rechenregeln für konvergente Folgen und/oder das Quetschlemma, sowie aus der Vorlesung bekannte Grenzwerte, um für die reellen Zahlenfolgen

(a) $x_n = \dfrac{1}{3}\sqrt[n]{3-\cos(n+1)} + (-2)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{3^n},$ (b) $y_n = \dfrac{2n^2}{(n-1)^3-n^3}$

den Grenzwert zu berechnen, falls er existiert.

H11 (a) Untersuchen Sie die reelle Zahlenfolge (x_n) auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\text{(i)}\ x_n = \frac{n}{3} + \frac{3}{n}, \qquad \text{(ii)}\ x_n = \sqrt[n]{\frac{n}{3} + \frac{3}{n}}, \qquad \text{(iii)}\ x_n = \frac{1 + 6n^4}{3n^4 + 2n - 1} + (-1)^n \frac{\sin(n)}{2n}.$$

(b) Verwenden Sie das Quetschlemma, um zu zeigen, dass die Folge (a_n), definiert durch $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$, eine Nullfolge ist.

H12 (a) Es sind reelle Zahlen $0 < a_0 < b_0$ gegeben und die Folgen (a_n) und (b_n) rekursiv durch

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \text{ (geometrisches Mittel)}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ (arithmetisches Mittel)}$$

definiert. Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$ (Intervallschachtelung).

(b) Von der geometrischen Folge (x_n) mit $x_n = cq^n$ sind $x_2 = -36, x_3 = 108$ und $x_m = -26\,244$ bekannt. Bestimmen Sie die Konstanten c, q und m.