TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2016

3. Übungsblatt für die Woche 25.04. - 01.05.2016

Unendliche Reihen

Begriffe: Partialsumme, Summe, geometrische Reihe, Nullfolgenkriterium, Vergleichskriterium

Ü13 (a) Berechnen Sie für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{5k-2}{(k-1)!}$ ihre Partialsummen s_n für $n = 1, 2, 3$.

(b) Welche der angegebenen Zahlenreihen sind konvergent, welche nicht? Verwenden Sie das Nullfolgenkriterium(Hauptkriterium) oder geeignete Rechenregeln. Berechnen Sie gegebenenfalls die Summe.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+k}{1-200k}$, (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n - 1\right)$, (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{k!} + \frac{\sqrt{2}}{2^k}\right)$.

Ü14 Für welche der folgenden Reihen existiert deren Summe? Berechnen Sie gegebenenfalls diese Summe, indem Sie die Reihe auf passende geometrische Reihen zurückführen:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^{n+3}}{4^n}$, (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}+2(-7)^n}{11^n}$, (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+8^{\frac{n}{3}}}{2^{n-2}}$, (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}+2^{3n}}{10^n}$.

Ü15 (a) Verwenden Sie das Vergleichskriterium, um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a}\right)$$

für jeden festen, reellen Parameterwert $a > 0$ konvergent ist.

(b) Untersuchen Sie folgende Reihen mittels des Vergleichskriteriums auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-2}{k^4+2}$, (b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{2k+1}}{k-1}$, (c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k+7\sqrt{k}}{k^3-k}$.

A H16 Welche der angegebenen Zahlenreihen sind konvergent, welche nicht? Nutzen Sie zur Begründung das Nullfolgenkriterium (Hauptkriterium) oder das Vergleichskriterium.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^{2n}}{5^n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$.

Tipp für (c): Die Abschätzung muss nicht für alle n gelten, nur ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $n \geq n_0$. Schätzen Sie $\frac{1}{n}$ geeignet nach oben ab.

H17 (a) Berechnen Sie die Summe der Reihe $\sum_{m=0,n=0}^{\infty} \frac{3}{m!} \cdot \frac{1}{5^n}$. Verwenden Sie dazu das Cauchy-Kriterium und aus der Vorlesung bekannte Reihensummen.

(b) Verwenden Sie geeignete Konvergenzkriterien oder Rechenregeln, um für die Zahlenreihen

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{2^{n-1}+7^n}{2^{n+1}+7^{n+1}}$, (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+3^{k+1}}{5^k}$, (iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4^k}{6^k} - \frac{10}{k!}\right)$.

zu untersuchen, ob sie konvergieren.

*H18 Am Anfang eines 1 Meter langen Zaubergummibandes sitzt eine Schnecke. Jeden Tag kriecht sie 1 cm voran. Nachts, wenn sie ruht, dehnt sich das Band gleichmäßig so, dass es jedesmal im Verlaufe der Nacht um 1 Meter länger wird. Die Schnecke ist unsterblich, das Band unbegrenzt dehnbar. Schafft es die Schnecke, das Ende des Bandes in endlicher Zeit zu erreichen?