TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2016

7. Übungsblatt für die Woche 30.05. - 05.06.2016

Begriffe: Potenzreihe, Linearisierung, Taylorentwicklung

Ü37 (a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5k^2}{(k+1)^3}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^k, \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k^k}(x-1)^k, \qquad \text{(iii)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}\left(1-3x\right)^k.$$

Sind die Reihen im Punkt $x = 1$ konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+\pi)^k}{\pi^k\,(k+2)^2}$?

Ü38 Gegeben sind folgende Funktionen f und Werte $x_0 \in \mathbb{R}$:

(i) $f(x) = 1 - \ln(x), \quad x_0 = 1,$ (ii) $f(x) = \sqrt{1+2x}, \quad x_0 = 0.$

(a) Stellen Sie für die Funktionen jeweils das Taylorpolynom 2. Grades $p_2(x, x_0)$ mit Entwicklungsstelle x_0 auf.

(b) Wie lautet die Linearisierung von f um x_0?

(c) Skizzieren Sie f, seine Linearisierung um x_0 und p_2 in einem Diagramm.

(d) Geben Sie den Approximationsfehler $|f(x) - p_2(x, x_0)|$ über das Restglied an.

(e) Stellen Sie für f aus (i) die Taylorreihe mit Entwicklungsstelle x_0 auf, und berechnen Sie deren Konvergenzradius.

Ü39 Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, indem Sie Ergebnisse aus Aufgabe 38 verwenden.

A H40 Gegeben ist die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k(k+1)} \cdot (x-1)^k$.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt x_0 und den Konvergenzradius r.

(b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Potenzreihe in den Randpunkten $x_0 \pm r$ des Konvergenzintervalls.

$\boxed{\textbf{A}}$ H41 (a) Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = \cos(x^2 - 1)$ und $g(x) = 1 + 2x - 3x^2$ und der Wert $x_0 = 1$.

(i) Stellen Sie für beide Funktionen die Taylorpolynome 2. und 3. Grades mit Entwicklungsstelle x_0 auf.

(ii) Wie lautet jeweils die Gleichung der Tangente in x_0?

(iii) Geben Sie den Approximationsfehler zwischen f und seinem Taylorpolynom 2. Grades um x_0 für beliebige $x \in \mathbb{R}$ mittels des Restgliedes $R_2(x, x_0)$ an.

Zusatz (b) Bestimmen Sie alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, für die der Approximationsfehler zwischen der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und ihrem Taylorpolynom 3. Grades mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ kleiner als 10^{-4} ist.

(Gibt bei richtiger Lösung einen Zusatzpunkt.)

$\boxed{\textbf{A}}$ H42 Bestimmen Sie die Reihensumme für alle Werte x, in denen folgende Potenzreihen existieren, indem Sie die Reihen auf passende geometrische Reihen zurückführen:

(a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{3^n} \cdot (x-1)^n,$$ (b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}} \cdot x^{n+1}.$$

Geben Sie für beide Reihen ihren Konvergenzradius an!