TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Dr. Ulrike Baumann

Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2016

9. Übungsblatt für die Woche 13.06. - 19.06.2016

Begriffe: Integral, Substitutionsmethode, partielle Integration

Ü49 Es wird die Funktion $f(x) = \dfrac{\tan(2x)}{\cos(2x)}$ betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = \dfrac{1}{2\cos(2x)}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist.

(b) Geben Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ an.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die von der Kurve $f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}]$ begrenzt wird.

Ü50 Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Methode der Substitution:

(i) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$, (ii) $\displaystyle\int \sin x(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ (iii) $\displaystyle\int \frac{3e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{2x}\,\mathrm{d}x$, (v) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

Führen Sie eine Probe für Ihre Ergebnisse durch!

Ü51 (a) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit der Methode der partiellen Integration:

(i) $\int (2x+1)\sin x\ \mathrm{d}x$, (ii) $\int (2x+1)\arctan x\ \mathrm{d}x$, (iii) $\int \ln(x)\ \mathrm{d}x$,

(iv) $\int e^{2x}\cos 3x\ \mathrm{d}x$, (v) $\int (3x^2+1)\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

(b) Leiten Sie mittels eines geeigneten Integrals die Formel für den Flächeninhalt der Ellipse

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

mit Halbachsen der festen Längen $a > 0, b > 0$ her.

H52 (a) Berechnen Sie die Länge der Kettenlinie $f(x) = \cosh x$ auf dem Intervall $[0,1]$.

(b) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen deren Stammfunktion mit der Methode der Substitution und/oder geeigneten Rechenregeln:

(i) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^3+3}}$, (ii) $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{x} + 8\sqrt[5]{x^3}$, (iii) $f(x) = \dfrac{x\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$.

H53 Berechnen Sie folgende bestimmte bzw. unbestimmte Integrale mit partieller Integration:

(i) $\int (x^2 - 4) \cos 2x \, \mathrm{d}x$, (ii) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, \mathrm{d}x.$

H54 Arthur Dent hat (neben seinem Handtuch) auch sein Schnapsglas auf die Reise per Anhalter durch die Galaxis mitgenommen. Er hat es eigens so fertigen lassen, dass die Randkurve dem Graph seiner Lieblingsfunktion $f(x) = x^4\sqrt{x^3+1}$ für $x \in [0, 1.342]$ entspricht. Um der drohenden Langeweile in den Weiten des Alls zu entkommen, starrt er auf das Glas und überlegt, wie viel Flüssigkeit er zu sich nimmt, wenn er das randvolle Glas in sich hineinkippt.

Berechnen Sie dieses Volumen, (konsultieren Sie für die passende Volumenformel eines Rotationskörpers z.B. Ihre Formelsammlung, falls Sie die Formel nicht, wie Arthur, im Kopf haben).