

**Mathematische Methoden für Informatiker INF-120
Sommersemester 2016**

0. Übungsblatt für die Woche 04.04. - 10.04.2016

Grundlagen zur Analysis

A1 Es wird die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ betrachtet. Bestimmen Sie die folgenden Funktionen und skizzieren Sie ihre Funktionskurven:

- (a) $y = f(-x)$, (b) $y = -f(x)$, (c) $y = 2f(x)$,
(d) $y = f(2x)$, (e) $y = f(x+2)$, (f) $y = f(x) + 2$.

A2 Skizzieren Sie die Bilder folgender reeller Funktionen $y = f(x)$:

- (a) $y = e^{x-1} - 1$, (b) $y = \cos(x + \pi)$, (c) $y = 1 - \sin \frac{x}{2}$,
(d) $y = |x - 1|$, (e) $y = \ln |x - 1|$, (f) $y = (x - 1)(x + 2)$,
(g) $y = \frac{1}{x^2 - 3}$.

A3 Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

- (a) $x^4 + 4 = 4x^2 + 9$, (b) $\sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{1 - 2x} = 0$,
(c) $\ln(e^x - 1) > \ln(2)$, (d) $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

(*) Verwenden Sie (d), um zu zeigen, dass unter allen Rechtecken mit festem Flächeninhalt von 1 FE das Quadrat den kleinsten Umfang hat.

A4 Wie würden Sie vorgehen, um die reellen Lösungen folgender Ungleichungen zu finden?

- (a) $|x - 4| < 6$, (b) $|x - 1| + |x + 2| \leq 4$.

Weitere Aufgaben zur Wiederholung im Selbststudium:

A5 (a) Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(i) $2 \ln(x) \cdot \ln(x + 6) - \ln^2(x + 6) = 0$, (ii) $\frac{x-2}{x+3} < 2x$,

(iii) $|1 + x| \geq 4$, (iv) $\left| \frac{x-3}{2x+4} \right| < 1$.

(b) Stellen Sie die folgenden Terme in Form eines möglichst einfachen, vollständig gekürzten Bruches dar:

(i) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$, (ii) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{a-b}{ab}} - \frac{4}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}, \quad a > b > 0$.

(Tipp: Mit Differenz der Wurzeln des Nenners erweitern)

A6 Gegeben sind die reellen Polynome $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ und $q(x) = x^2 + x - 2$.

(a) Berechnen Sie die Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ für $x > 1$ durch Polynomdivision.

Untersuchen Sie, ob $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv bzw. surjektiv ist.

(b) Bestimmen Sie alle reellen Nullstellen von $p(x)$, und zerlegen Sie $p(x)$ in Linearfaktoren.

A7 Betrachtet wird der Vektorraum V aller reellen Polynome vom Grad kleiner 3 mit der üblichen Polynomaddition und Skalierung mit einem Skalar aus $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob die Menge

$$U = \left\{ p(x) = ax^2 + bx + c \mid 2a + 3b + 4c = 0, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Untervektorraum von V bildet.

A8 Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_2} \cdot z_1$, $\overline{z_2} \cdot z_2$ von:

(a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i$, (b) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 5i$,

(c) $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 4 + 5i$, (d) $z_1 = i$, $z_2 = -2 - 4i$.

A9 Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild von $z \neq 0$ bei Spiegelung

(a) an der reellen Achse,

(b) an der imaginären Achse,

(c) an der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten?

A10 (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen:

(i) $z = \frac{3+2i}{1+i}$, (ii) $z = (\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$.

(b) Stellen Sie die komplexen Zahlen in trigonometrischer und kartesischer Form dar:

(i) $z = (1 - i)^6$, (ii) $z = e^{2+3\pi i}$.

(c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

(i) $z^4 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}i - 1)$, (ii) $z^2(1 + i) = 2z$.

Literaturempfehlungen zu den Grundlagen der Analysis, um Lücken aus dem Schulstoff zu schließen:

- Rießinger, Thomas:
Mathematik für Ingenieure - Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium, Springer, 2005. (Lehrbuchsammlung SLUB)
dazu das Buch der Übungsaufgaben nebst Lösungen (Lehrbuchsammlung SLUB)
- Bosch, Karl:
Brückenkurs Mathematik, Oldenbourg, 2010. (DrePunct)
- Gehrke, Jan:
Brückenkurs für Wirtschafts- und Naturwissenschaften, Oldenbourg, 2012. (DrePunct)
- Scheid, Harald:
Abiturwissen Analysis, Klett-Verlag, 1994. (SLUB)
- weitere Literatur zum Abiturwissen in der SLUB unter SM 900 - 910.