TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

10. Übungsblatt

Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Ü55 (a) Vervollständigen Sie die nebenstehende Tafel so, dass die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ mit der durch die Tafel definierten Operation $\circ$ eine Gruppe bildet (die Elemente sind natürlich paarweise verschieden).

Wie viele Möglichkeiten gibt es? Gilt Kommutativität?

Finden Sie zu jeder der Gruppen alle ihre Untergruppen.

$\circ$	a	b	c	d
a	a			d
b		a		
c	c			
d				

(b) Schreiben Sie die Verknüpfungstafeln der Gruppen $(\mathbb{Z}_4, +)$ (mit Addition mod 4) und $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ (mit komponentenweiser Addition mod 2) auf, und vergleichen Sie die Gruppen mit den Gruppen aus (a).

Lösung:

(a) Man überlegt sich schnell, dass a das neutrale Element ist, denn aus $a \circ a = a = a \cdot e$ folgt mit Kürzungsregel $a = e$. Es gibt schließlich genau zwei Möglichkeiten:

1.

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

2.

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	b	a
d	d	c	a	b

Beide Gruppen sind offenbar abelsch, d.h. kommutativ.

Untergruppen: Da die Ordnung beider Gruppen 4 ist, sind nur Untergruppen der Ordnung 1, 2 oder 4 möglich (Satz von Lagrange).

$\boxed{\text{1. Gruppe:}}$

$|\langle a \rangle| = |\{a\}| = 1,\ |\langle b \rangle| = |\{a, b\}| = 2,\ |\langle c \rangle| = |\{a, c\}| = 2,\ |\langle d \rangle| = |\{a, d\}| = 2.$
Untergruppen sind $\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle, \langle d \rangle$ und die Gruppe selbst, weitere sind nicht möglich.

$\boxed{\text{2. Gruppe:}}$

$|\langle a \rangle| = |\{a\}| = 1,\ |\langle b \rangle| = |\langle d \rangle| = |\{a, b, c, d\}| = 4,\ |\langle c \rangle| = |\{a, c\}| = 2.$
Untergruppen sind $\langle a \rangle, \langle c \rangle$ und die Gruppe selbst, weitere sind nicht möglich.

(b) Es ist

$(\mathbb{Z}_4, +)$

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$(Z_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

$+$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

Durch Vergleich der Tafeln erkennt man, dass die 1. Gruppe (Kleinsche Vierergruppe) zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ und die 2. Gruppe zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorph ist. Bei letzterer hilft eine Umsortierung der 2. Gruppe.

H60 Zeigen Sie, dass die Menge $G := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 1\}$ mit der Operation

$$x \circ y := x^{\ln y} \qquad \text{für alle } x, y \in G$$

eine abelsche Gruppe bildet.

(Hinweis. eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt *abelsch*, wenn sie kommutativ ist.)

Lösung:

(1) Die Kommutativität ist erfüllt:
$a \circ b = a^{\ln b} = e^{\ln(a^{\ln b})} = e^{\ln b \cdot \ln a} = e^{\ln a \cdot \ln b} = e^{\ln(b^{\ln a})} = b^{\ln a} = b \circ a$

(2) Das Assoziativgesetz ist erfüllt:
$(a \circ b) \circ c = (a \circ b)^{\ln c} = (a^{\ln b})^{\ln c} = a^{\ln b \cdot \ln c} = a^{\ln c \cdot \ln b} = a^{\ln(b^{\ln c})} = a^{\ln(b \circ c)} = a \circ (b \circ c)$

(3) e ist das neutrale Element, denn: $e \circ a = e^{\ln a} = a = a^1 = a^{\ln e} = a \circ e$

(4) Zu jedem Element a aus den reellen Zahlen mit $a > 1$ existiert ein Inverses:
$a^{-1} := e^{\frac{1}{\ln a}}$, denn
$a \circ a^{-1} = a^{\ln\left(e^{(\frac{1}{\ln a})}\right)} = a^{(\frac{1}{\ln a})} = a^{\log_a e} = e = e^{\frac{\ln a}{\ln a}} = (e^{\frac{1}{\ln a}})^{\ln a} = a^{-1} \circ a$