Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

11. Übungsblatt

Permutationsgruppen

(Ü63) Zeigen Sie, dass sich in jeder symmetrischen Gruppe $(S_n, \circ)$ über der Menge $X = \{1, \dots, n\}$ mit $n \geq 8$ die Transpositionen $\alpha = (4\ 6)$, $\beta = (4\ 7)$ und $\gamma = (4\ 8)$ durch Hintereinanderausführung von Transpositionen der folgenden Form darstellen lassen:

$$\tau_1 = (1\ 2),\ \tau_2 = (2\ 3), \dots, \tau_{n-1} = (n-1\ n)\,.$$

Hinweis: Bei der Verknüpfung dieser Transpositionen ist natürlich mehrfaches Auftreten erlaubt.

Lösung: Es gilt: $(4\ 6) = (5\ 6) \circ (4\ 5) \circ (5\ 6)$ und

$(4\ 7) = (6\ 7) \circ (4\ 6) \circ (6\ 7) = (6\ 7) \circ (5\ 6) \circ (4\ 5) \circ (5\ 6) \circ (6\ 7)$ und

$(4\ 8) = (7\ 8) \circ (4\ 7) \circ (7\ 8) = (7\ 8) \circ (6\ 7) \circ (5\ 6) \circ (4\ 5) \circ (5\ 6) \circ (6\ 7) \circ (7\ 8)$.

(Also allgemein für $(a\ b)$ ...)

H65 Es sei R die Menge der Symmetrieabbildungen eines Rechtecks, welches kein Quadrat ist.

(a) Geben Sie alle diese Symmetrieabbildungen als Permutationen der Eckpunkte des Rechtecks an (die Eckpunkte seien im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet).

(b) Zeigen Sie, dass R mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe bildet. Stellen Sie dazu die Verknüpfungstafel auf.

(c) Ist $(R, \circ)$ abelsch?

Lösung:

(a) Bezeichnet man die Permutationen des Quadrates (Diedergruppe D_4) wie zuvor, dann bleiben für das Rechteck die Permutationen σ_0, σ_2, s_1 und s_3 erhalten.

(b) Gruppentafel

$(R, \circ)$

$\circ$	σ_0	σ_2	s_1	s_3
σ_0	σ_0	σ_2	s_1	s_3
σ_2	σ_2	σ_0	s_3	s_1
s_1	s_1	s_3	σ_0	σ_2
s_3	s_3	s_1	σ_2	σ_0

Diese Gruppen ist offenbar zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ isomorph.

(c) Die Gruppe ist abelsch, siehe Symmetrie der Gruppentafel.

H61 Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller geraden Permutationen A_n von S_n (d.h. der Permutationen α mit $\mathrm{sgn}(\alpha) = 1$) eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ bildet (die sog. *alternierende Gruppe vom Grad n*).

Lösung: Zu zeigen ist:

(1) A_n ist bzgl. $\circ$ abgeschlossen,

(2) $\mathrm{id} \in A_n$,

(3) $\forall\, \alpha \in A_n: \quad \alpha^{-1} \in A_n$.

$\boxed{\text{Abgeschlossenheit:}}$ Zu zeigen: $\forall \alpha, \beta \in A_n : \ \alpha \circ \beta \in A_n$. Seien $\alpha, \beta \in A_n$ beliebig:

sgn$(\alpha \circ \beta)$ =sgn(α)sgn(β) $\Rightarrow$ sgn$(\alpha \circ \beta) = 1 \cdot 1 = 1$ $\Rightarrow$ $\alpha \circ \beta \in A_n$.

$\boxed{\text{Neutrales Element:}}$ Es ist id $\in A$, da sgn(id)$= 1$.

$\boxed{\text{Inverses:}}$ Sei $\alpha \in A_n$ beliebig.

Dann existieren Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k$ mit $\alpha = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$. Da jede Transposition zu sich selbst invers ist, folgt $\alpha^{-1} = \tau_k \circ \ldots \circ \tau_1$ und sgn(α^{-1})=sgn(α)= 1. Also $\alpha^{-1} \in A_n$.

(Bemerkung: Da A_n eine endliche Menge ist, genügt es eigentlich, (1) zu zeigen, die anderen Eigenschaften folgen.)