TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

**Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack**

# Algebra für Informationssystemtechniker
# Sommersemester 2018

12. Übungsblatt für die Woche 11.06. - 17.06.2018

*Nebenklassen, Faktorgruppen*

(Ü69) (a) Die Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ ist zyklisch. Wie viele erzeugende Elemente gibt es für diese Gruppe? Finden Sie alle diese Elemente.

(b) Betrachtet wird nun die Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ der Einheiten von $\mathbb{Z}_{15}$ bzgl. der Multiplikation mod 15. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_{15}^*$ und deren Ordnungen.

Ist $(\mathbb{Z}_{15}^*, .)$ zyklisch?

Ist $\mathbb{Z}_{15}^*$ zu $(\mathbb{Z}_8, +)$ isomorph?

Ist $\mathbb{Z}_{15}^*$ zu $(D_4, \circ)$ isomorph?

**Lösung:**

Es gibt genau $\varphi(15) = \varphi(3 \cdot 5) = 2 \cdot 4 = 8$ erzeugende Elemente in $\mathbb{Z}_{15}$. Es ist $m$ erzeugendes Element in $\mathbb{Z}_{15}$ bzgl. $+$ genau dann, wenn die Vielfachen von $m$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_{15}$ durchlaufen: $n \cdot m \not\equiv 0$ mod 15 für $n < 15$.

$\Rightarrow$ die erzeugenden Elemente sind gerade die Einheiten von $\mathbb{Z}_{15}$.

Die Einheiten von $\mathbb{Z}_{15}$ sind: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 (zu 15 teilerfremde Zahlen in $\mathbb{Z}_{15}$).

$G$ ist nicht zyklisch, und damit nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_8, +)$, denn es gibt kein erzeugendes Element:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^n$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | | | |
| $4^n$ | 1 | 4 | 1 | | | | | |
| $7^n$ | 1 | 7 | 4 | 13 | 1 | | | |
| $8^n$ | 1 | 8 | 4 | 2 | 1 | | | |
| $11^n$ | 1 | 11 | 1 | | | | | |
| $13^n$ | 1 | 13 | 4 | 7 | 1 | | | |
| $14^n$ | 1 | 14 | 1 | | | | | |

$\mathbb{Z}_{15}^*$ nicht zu $(D_4, \circ)$ isomorph, da $D_4$ nicht abelsch ist, $\mathbb{Z}_{15}^*$ ist jedoch abelsch.

H72 Betrachtet wird die Gruppe $(G, \circ)$ mit $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und der Operation

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G,$$

mit den üblichen Additionen in $\mathbb{Z}_2$ bzw. $\mathbb{Z}_3$ in der 1. bzw. 2. Komponente.

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe $(G, \circ)$ auf. Welche Ordnungen haben die Elemente dieser Gruppe? Gibt es erzeugende Elemente für $G$?

(b) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$ ist.

Lösung:

(a) Gruppentafel zu $(G, \circ) = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$:

| $\cdot$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(0,2)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0,0)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(0,2)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ |
| $(0,1)$ | $(0,1)$ | $(0,2)$ | $(0,0)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,0)$ |
| $(0,2)$ | $(0,2)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(1,2)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ |
| $(1,0)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ | $(0,2)$ |
| $(1,1)$ | $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,0)$ | $(0,1)$ | $(0,2)$ | $(0,0)$ |
| $(1,2)$ | $(1,2)$ | $(1,0)$ | $(1,1)$ | $(0,2)$ | $(0,0)$ | $(0,1)$ |

Ordnungen der Elemente von $(G, \circ)$:

Ordnung von $(0,0)$: 1

| $(0,1)$ |
|---|
| $(0,1)+(0,1)=(0,2)$ |
| $(0,1)+(0,2)=(0,0)$ |
| $\to$ Ordnung von $(0,1)$ : 3 |

| $(0,2)$ |
|---|
| $(0,2)+(0,2)=(0,1)$ |
| $(0,2)+(0,1)=(0,0)$ |
| $\to$ Ordnung von $(0,2)$ : 3 |

| $(1,0)$ |
|---|
| $(1,0)+(1,0)=(0,0)$ |
| $\to$ Ordnung von $(1,0)$ : 2 |

| $(1,1)$ |
|---|
| $(1,1)+(1,1)=(0,2)$ |
| $(1,1)+(0,2)=(1,0)$ |
| $(1,1)+(1,0)=(0,1)$ |
| $(1,1)+(0,1)=(1,2)$ |
| $(1,1)+(1,2)=(0,0)$ |
| $\to$ Ordnung von $(1,1)$ : 6 |

| $(1,2)$ |
|---|
| $(1,2)+(1,2)=(0,1)$ |
| $(1,2)+(0,1)=(1,0)$ |
| $(1,2)+(1,0)=(0,2)$ |
| $(1,2)+(0,2)=(1,1)$ |
| $(1,2)+(1,1)=(0,0)$ |
| $\to$ Ordnung von $(1,2)$ : 6 |

Es gilt $G = \langle(1,1)\rangle = \langle(1,2)\rangle$ ($G$ ist zyklische Gruppe.)

(b) $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$.
Bezüglich der Addition hat das Element 0 die Ordnung 1, das Element 3 die Ordnung 2, die Elemente 2 und 4 haben die Ordnung 3 und die Elemente 1 und 5 sind erzeugende Elemente (Ordnung 6). Es ist $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle$ Die Gruppe $G$ ist somit isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Isomorphismus:

$$\varphi: \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$$

| $x$ | $\varphi(x)$ |
|---|---|
| $(1,1)$ | 1 |
| $(1,1)+(1,1)=(0,2)$ | 2 |
| $(1,1)+(0,2)=(1,0)$ | 3 |
| $(1,1)+(1,0)=(0,1)$ | 4 |
| $(1,1)+(0,1)=(1,2)$ | 5 |
| $(1,1)+(1,2)=(0,0)$ | 0 |