TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

9. Übungsblatt

Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Ü49 Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen M mit den angegebenen Operationen Halbgruppen, Monoide oder Gruppen sind. Welche der Operationen sind kommutativ?

(a) $M = \mathbb{Z}, \quad \forall x, y \in M: \ x \circ y := x + y - x \cdot y,$
(mit der üblichen Multiplikation $\cdot$ und Addition $+$ der reellen Zahlen)

(b) $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, \quad \forall (r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2) \in M: \ (r_1, \varphi_1) \circ (r_2, \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2),$
(mit der üblichen Multiplikation $\cdot$ und Addition $+$ der reellen Zahlen)

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \ \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit der üblichen Matrizenmultiplikation.

Lösung:

(a) $\boxed{\text{abgeschlossen:}}$ Operation $\circ$ ist offensichtlich abgeschlossen in $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{assoziativ:}}$ ja, denn für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) \circ z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ und
$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - yz) = x + y + z - yz - xy - xz + xyz.$

$\boxed{\text{neutrales Element:}}$ ist 0, denn $0 \circ x = 0 + x - 0 \cdot x = x = x + 0 - x \cdot 0 = x \circ 0$.

$\boxed{\text{inverses Element?}}$ Es sei $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ beliebig. Wenn x^{-1} existierte, müsste gelten:

$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 0 \quad \Rightarrow x^{-1} = \frac{x}{x-1}$

aber diese Zahl liegt für $x \neq 0$ nicht in $\mathbb{Z}$. Es ist also keine Gruppe.

(b) Entspricht der Multiplikation im Komplexen bei Verwendung der exponentiellen Form: $z = re^{\varphi}$. Da die Struktur zu $(C \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph ist, ist es eine abelsche Gruppe.
Oder im Detail:

$\boxed{\text{abgeschlossen:}}$ Operation $\circ$ ist offensichtlich abgeschlossen. in $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{assoziativ:}}$ ja, denn die Addition und Multiplikation reeller Zahlen wirken separat auf

den Komponenten und haben diese Eigenschaft.

$\boxed{\text{neutrales Element:}}$ ist offenbar $(1, 0)$.

$\boxed{\text{inverses Element}}$ ist für beliebiges (r, φ) mit $r \neq 0$ durch $(r, \varphi)^{-1} = (\frac{1}{r}, -\varphi)$ gegeben.

(c) $\boxed{\text{abgeschlossen:}}$ M ist bzgl. $\circ$ abgeschlossen, denn:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M: \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc \\ 0 & ac \end{pmatrix} \in M\,.$$

$\boxed{\circ \text{ ist assoziativ:}}$ Es ist bekannt, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.
$\Rightarrow$ M bildet mit dieser Operation eine Halbgruppe.

$\boxed{\text{neutrales Element:}}$ $e = E_2 \in M \;\Rightarrow\; (M, \cdot)$ ist ein Monoid.

$\boxed{\text{Inverses Element:}}$ Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in M$ beliebig. Da $a \neq 0$, ist $\det A = a^2 \neq 0$, also existiert A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_2$. Die Inverse ist $A^{-1} = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ liegt also in M.
$\Rightarrow$ $(M, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Ü50 Beweisen Sie:

(a) Der Durchschnitt zweier Unterhalbgruppen U, V einer Halbgruppe $(H, \circ)$ ist eine Unterhalbgruppe oder $\emptyset$.

(b) Für jedes Element a eines Monoids $(H, \circ)$ existiert höchstens ein $b \in H$ mit

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Lösung:

(a) Seien $a, b \in U \cap V$ beliebig. Da U, V Untergruppen sind, gilt $a \circ b \in U$ und $a \circ b \in V$ und folglich $a \circ b \in U \cap V$.

(b) Annahme, es gäbe $a, b_1, b_2 \in H$ mit $a \circ b_1 = b_1 \circ a = e$ und $a \circ b_2 = b_2 \circ a = e$, dann folgt: $b_1 = b_1 \circ e = b_1 \circ (a \circ b_2) = (b_1 \circ a) \circ b_2 = e \circ b_2 = b_2$. Widerspruch.

Ü51 (a) Finden Sie alle Unterhalbgruppen der Halbgruppe $(H, \circ)$, die durch die nebenstehende Verknüpfungstafel definiert ist.

Gibt es unter diesen Unterhalbgruppen solche, die mit der Operation $\circ$ Monoide oder sogar Gruppen bilden?

$\circ$	1	2	3	4
1	3	2	3	4
2	2	4	2	3
3	3	2	3	4
4	4	3	4	2

(b) Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $M = \{f : A \to A\}$. Es werden zwei Abbildungen $f_1, f_2 \in M$ betrachtet, die folgendermaßen definiert sind:

$f_1(a) = a, f_1(b) = f_1(c) = b$ und $f_2(a) = b,\ f_2(b) = g(c) = a.$

Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{f_1, f_2\}$ von M mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen ein Monoid bildet. Handelt es sich um ein Untermonoid des Monoids $(M, \circ)$?

Lösung:

(a) s. Übungsmitschrift.

(b) $U = \{f, g\}$ bildet Monoid, wenn U bzgl. $\circ$ abgeschlossen ist und ein Einselement e_U existiert (wissen, dass $\circ$ assoziativ ist, da $(M, \circ)$ Monoid ist):

	f	g	$f \circ f$	$f \circ g$	$g \circ f$	$g \circ g$
a	a	b	a	b	b	a
b	b	a	b	a	a	b
c	b	a	b	a	a	b
			$= f$	$= g$	$= g$	$= f$

$\Rightarrow$ U ist abgeschlossen bzgl. $\circ$. Einselement ist $e_U = f$.

Kein Untermonoid von $(M, \circ)$, da $e_U \neq e_M = \mathrm{id}$.

H53 (a) Untersuchen Sie die Menge der geraden natürlichen Zahlen und die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen darauf, ob sie mit der üblichen Addition bzw. mit der üblichen Multiplikation eine Halbgruppe oder sogar ein Monoid bilden.

(b) Es bezeichne A^* die Menge aller endlichen Zeichenketten ("Wörter"), die sich aus dem Alphabet $A = \{a, b, \dots, z\}$ bilden lassen, zusammen mit dem leeren Wort ϵ. Als Operation $\circ_{\mathbb{A}}$ auf A^* sei die Verkettung der Wörter $w_1 \circ_{\mathbb{A}} w_2 = w_1 w_2$ für alle $w_1, w_2 \in A^*$ betrachtet (Konkenation).

Zeigen Sie, dass A^* mit dieser Operation ein Monoid bildet. Handelt es sich sogar um eine Gruppe?

Lösung

(a) Addition und Multiplikation der natürlichen Zahlen ist bekanntlich assoziativ, beide Operationen haben auch ein neutrales Element, und zwar 0 bzw. 1.

Bleibt die Abgeschlossenheit zu prüfen: Addition und Multiplikation sind in den geraden Zahlen abgeschlossen, diese Menge bildet also mit beiden Operationen Halbgruppen, ein Monoid jedoch nur mit der Addition, da 1 keine gerade Zahl ist und auch kein anderes neutrales Element für die Multiplikation der geraden Zahlen existiert.

Die ungeraden Zahlen sind bzgl. der Addition nicht abgeschlossen, damit bilden sie damit nicht einmal eine Halbgruppe, bzgl. der Multiplikation sind sie abgeschlossen und 1 ist enthalten, sie bilden also ein Monoid.

(b) $\boxed{\text{abgeschlossen:}}$ Operation $\circ$ ist offensichtlich abgeschlossen in Σ^*.

$\boxed{\text{assoziativ:}}$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \Sigma^*$:

$(w_1 \circ w_2) \circ w_3 = w_1 w_2 w_3 = w_1 \circ (w_2 \circ w_3)$.

$\boxed{\text{neutrales Element:}}$ $e = \epsilon$.

(Bemerkung: $\circ$ ist offenbar nicht kommutativ.)

$(\Sigma^*, \circ)$ ist keine Gruppe, da es nicht zu jedem Wort ein Inverses gibt. Genaugenommen gibt es ausser zu ϵ zu keinem Wort ein Inverses: Da $w_1 \circ w_2 = w_3$ ein Wort w_3 ergibt, das in seiner Länge nicht kürzer als die Ausgangswörter w_1, w_2 ist, kann nie $w_1 \circ w_2 = \epsilon$ gelten, wenn w_1 nichtleer ist.