TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

11. Übungsblatt

Permutationsgruppen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

- Schreiben Sie die durch $g_k(x) \equiv x + k \pmod 8$ mit $k = 1, 2, 3, 4$ gegebenen Permutationen $g_1, \ldots, g_4$ aus der symmetrischen Gruppe $(S_8, \circ)$ über der Menge $X = \{0, \ldots, 7\}$ als 2-Zeilen-Matrix und in Zyklendarstellung.
- In der symmetrischen Gruppe $(S_6, \circ)$ ist die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

  Geben Sie σ einerseits in Zyklenschreibweise, andererseits als Hintereinanderausführung von Transpositionen an. Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

  Welches ist die kleinste Untergruppe von S_6, die σ enthält? (Bezeichnung: $\langle\sigma\rangle$)

Ü61 In der symmetrischen Gruppe $(S_9, \circ)$ werden folgende Permutationen betrachtet:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 3 & 6 & 4 & 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 9 & 7 & 8 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie α, β, α^{-1}, β^{-1}, $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$ in Zyklenschreibweise.

(b) Welche Ordnung haben α und β? Welches Signum haben α und β?
(Die *Ordnung* einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist die Ordnung der kleinsten Untergruppe von $(S_n, \circ)$, die σ enthält.)

(c) Geben Sie β^{2018} in Zyklenschreibweise an. Welches Signum hat β^{2018}?

(d) Bestimmen Sie die Untergruppen $\langle\alpha\rangle$ und $\langle\beta\rangle$ von S_9. Vergleichen Sie beide Untergruppen.

(e) Welche Ordnung haben die Permutationen β^4, β^5 und β^9?

(f) Welche maximale Ordnung kann eine Permutation aus S_9 haben?

Ü62 Es wird die Menge D_5 der Symmetrieabbildungen des regelmäßigen Fünfecks betrachtet. Sie bildet mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, die Diedergruppe $(D_5, \circ)$.

(a) Geben Sie alle Symmetrieabbildungen als Permutationen der Eckpunkte des Fünfecks an (die Eckpunkte seien im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, 4, 5$ bezeichnet), und ordnen Sie jeder dieser Permutationen ihre Inverse in D_5 zu.

(b) Wählen Sie eine Drehung d und eine Spiegelung s aus D_5, um $d \circ s$ und $s \circ d^{-1}$ zu berechnen.

(c) Ist $(D_5, \circ)$ abelsch?

(d) Wie viele Elemente von D_5 benötigt man, um die gesamte Gruppe zu erzeugen?

Ü63 Zeigen Sie, dass sich in jeder symmetrischen Gruppe $(S_n, \circ)$ über der Menge $X = \{1, \ldots, n\}$ mit $n \geq 8$ die Transpositionen $\alpha = (4\ 6)$, $\beta = (4\ 7)$ und $\gamma = (4\ 8)$ durch Hintereinanderausführung von Transpositionen der folgenden Form darstellen lassen:

$$\tau_1 = (1\ 2),\ \tau_2 = (2\ 3), \ldots, \tau_{n-1} = (n-1\ n)\,.$$

Hinweis: Bei der Verknüpfung dieser Transpositionen ist natürlich mehrfaches Auftreten erlaubt.

A64 **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Matrikelnummer abgeben.**

(a) Es wird die symmetrische Gruppe $(S_n, \circ)$ über der Menge $X = \{1, \ldots, n\}$ betrachtet. Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{\alpha \in S_n \mid \alpha(1) = 1\}$ eine Untergruppe von S_n bildet.

(b) In der symmetrischen Gruppe $(S_9, \circ)$ ist die Permutation

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 5 & 1 & 6 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie $\alpha,\ \alpha^{-1},\ \alpha^2,\ \alpha^3$ und α^{123} in Zyklenschreibweise.
Welche Ordnung hat α? Bestimmen Sie alle Elemente der Untergruppe $\langle\alpha\rangle$ von S_9.
Stellen Sie α und α^{-1} als Produkt von Transpositionen dar.

H65 Es sei R die Menge der Symmetrieabbildungen eines Rechtecks, welches kein Quadrat ist.

(a) Geben Sie alle diese Symmetrieabbildungen als Permutationen der Eckpunkte des Rechtecks an (die Eckpunkte seien im Uhrzeigersinn mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet).

(b) Zeigen Sie, dass R mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe bildet. Stellen Sie dazu die Verknüpfungstafel auf.

(c) Ist $(R, \circ)$ abelsch?

H66 Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge aller geraden Permutationen A_n von S_n (d.h. der Permutationen α mit $\operatorname{sgn}(\alpha) = 1$) eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$ bildet (die sog. *alternierende Gruppe vom Grad n*).