Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

12. Übungsblatt

Nebenklassen von Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

- Untergruppen welcher Ordnung kann die symmetrische Gruppe $(S_4, \circ)$ besitzen?
- Begründen Sie, warum die Gruppe $(S_4, \circ)$ nicht zyklisch ist.
- Bestimmen Sie alle Elemente der von $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2)$ und $\tau = (1\ 3)$ erzeugten Untergruppe $U = \langle\{\sigma, \tau\}\rangle$ von S_4 in Zyklenschreibweise.
  Wie viele Linksnebenklassen hat U in S_4?

Ü67 (a) Es wird die Gruppe $(\mathbb{Z}_8, +)$ betrachtet.
 (1) Ist $(\mathbb{Z}_8, +)$ zyklisch?
 (2) Untergruppen welcher Ordnung hat diese Gruppe? Geben Sie alle Untergruppen an.
 (3) Geben Sie zu jeder Untergruppe U ihre Linksnebenklassen an. Wie kann man die Linksnebenklassen der Untergruppen in der Gruppentafel von $\mathbb{Z}_8$ ablesen?

(b) Es sei $(G, \circ)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 12 und g ein erzeugendes Element von G. Bestimmen Sie die Untergruppe $\langle g^8 \rangle$ und alle ihre Linksnebenklassen.

(c) Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Begründen Sie, warum alle Linksnebenklassen (und Rechtsnebenklassen) von U dieselbe Anzahl Elemente haben.

Ü68 Betrachtet wird die folgende Definition der Diedergruppe $(D_n, \circ), n > 2$:

$$D_n = \langle \{d, s\} \mid d^n = e,\ s^2 = e,\ s \circ d = d^{-1} \circ s \rangle.$$

Dabei ist e das neutrale Element von D_n und n die *kleinste* positive Potenz von d mit $d^n = e$.

(a) Zeigen Sie, dass für $k \in 1, \ldots, n-1$ gilt:
- $s \circ d^k \circ s = d^{n-k}$.
- $d^k \circ s$ ist zu sich selbst invers.

(b) Überlegen Sie sich, wie viele Elemente D_n enthält. Ist D_n zyklisch? Ist D_n abelsch?

(c) Wie viele Linksnebenklassen haben die Untergruppen $\langle d \rangle$ und $\langle s \rangle$?

(d) Stellen Sie die Gruppentafel von $(D_4, \circ)$ auf, und finden Sie alle Untergruppen von $(D_4, \circ)$.

Ü69 (a) Die Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ ist zyklisch. Wie viele erzeugende Elemente gibt es für diese Gruppe? Finden Sie alle diese Elemente.

(b) Betrachtet wird nun die Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ der Einheiten von $\mathbb{Z}_{15}$ bzgl. der Multiplikation mod 15. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_{15}^*$ und deren Ordnungen.
Ist $(\mathbb{Z}_{15}^*, .)$ zyklisch?
Ist $\mathbb{Z}_{15}^*$ zu $(\mathbb{Z}_8, +)$ isomorph?
Ist $\mathbb{Z}_{15}^*$ zu $(D_4, \circ)$ isomorph?

A70 **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Matrikelnummer abgeben.**

(a) Die Gruppe $(\mathbb{Z}_{13}, +)$ ist zyklisch. Wie viele erzeugende Elemente hat diese Gruppe? Geben Sie alle diese Elemente an.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$ zyklisch ist. Wie viele erzeugende Elemente besitzt $\mathbb{Z}_{13}^*$?

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$. Begründen Sie, dass es keine weiteren gibt. Geben Sie für eine Untergruppe U von $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$ mit $1 < |U| < 12$ alle Linksnebenklassen an.

H71 In der symmetrischen Gruppe $(S_{11}, \circ)$ ist die Permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 4 & 10 & 6 & 8 & 11 & 1 & 9 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_{11}$$

gegeben. Es sei $U := \langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte Untergruppe von $(S_{11}, \circ)$.

(a) Geben Sie σ in Zyklenschreibweise an, und bestimmen Sie die Ordnung von σ.

(b) Geben Sie eine Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ an, die zu $(U, \circ)$ isomorph ist, und eine Abbildung f, die ein zugehöriger Isomorphismus ist.

(c) Wie viele Linksnebenklassen hat U in S_{11}?

(d) Wie viele Untergruppen hat die Gruppe $(U, \circ)$? Geben Sie zu jeder Untergruppe einen Erzeuger konkret an und die Anzahl Erzeuger, die sie besitzt.

H72 Betrachtet wird die Gruppe $(G, \circ)$ mit $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ und der Operation

$$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \quad \forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G,$$

mit den üblichen Additionen in $\mathbb{Z}_2$ bzw. $\mathbb{Z}_3$ in der 1. bzw. 2. Komponente.

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel der Gruppe $(G, \circ)$ auf. Welche Ordnungen haben die Elemente dieser Gruppe? Gibt es erzeugende Elemente für G?

(b) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ isomorph zur Gruppe $(\mathbb{Z}_6, +)$ ist.