TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

13. Übungsblatt

Ringe, Integritätsringe, Körper

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

Es sei $(R, +, \cdot)$ eine Ring und S mit $\emptyset \neq S \subseteq R$ eine Teilmenge von R.
Beweisen Sie das Unterring-Kriterium: Es ist S ein Unterring von R genau dann, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\forall a, b \in S: \ a + b \in S$ und $a \cdot b \in S$.

(2) $\forall a \in S: \ -a \in S$.

Ü73 Es werden folgende Restklassenringe betrachtet:

- $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 15,
- $(\mathbb{Z}_{17}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 17.

(a) Machen Sie sich klar, dass beide Strukturen alle Ringeigenschaften besitzen.

(b) Geben Sie jeweils, wenn vorhanden, einen Nullteiler und eine Einheit in dem Ring an. Wie viele Einheiten gibt es jeweils ?

(c) Handelt es sich bei diesen Restklassenringen sogar um Integritätsringe oder Körper ?

(d) Welche Unterringe gibt es in diesen Restklassenringen ?

Ü74 Es ist als bekannt vorauszusetzen, dass $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ mit

$$a \oplus b := a + b - 1, \quad a \odot b := a + b - ab$$

ein Ring ist.

(a) Wie findet man das Nullelement dieses Ringes ?

(b) Bestimmen Sie zu jedem Element $a \in \mathbb{Z}$ sein additives Inverses.

(c) Ist der Ring sogar ein Integritätsring ?

Ü75 Betrachtet wird die Menge $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit der üblichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ einen Integritätsring bildet.

(b) Welches sind die Einheiten von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$?

(c) Geben Sie Unterringe von $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ an.

A76 **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Matrikelnummer abgeben.**

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen, nichtleeren Menge M bildet mit den folgenden Operationen

$$\begin{aligned} A+B &:= A \triangle B = \{x \in M \mid x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)\}, \\ A \cdot B &:= A \cap B \qquad\qquad \text{für } A,\, B \in \mathcal{P}(M) \end{aligned}$$

einen endlichen, kommutativen Ring R mit Einselement (Das ist nicht zu beweisen!).

(a) Bestimmen Sie das Nullelement von R und zu jedem Element sein additives Inverses.

(b) Bestimmen Sie das Einselement von R, sowie alle Einheiten und alle Nullteiler.

H77 (a) Bestimmen Sie im Ring aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{Z}_2$

$$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

mit der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation mod 2 alle Nullteiler.

(b) Beweisen Sie, dass die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

einen Unterring von $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$ bildet. Ist U ein Körper?

H78 (a) Es sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring mit Einselement. Beweisen Sie:

(1) $\forall\, a, b \in R: \quad a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b).$

(2) $\forall\, a, b \in R: \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$

(b) Es ist als bekannt vorauszusetzen, dass es (bis auf Isomorphie) genau einen Körper K mit vier Elementen gibt und für das Nullelement 0 und das Einselement 1 gilt: $1 + 1 = 0$.
Wählen Sie $K = \{0, 1, a, b\}$, und stellen Sie die Operationstafeln für $(K, +)$ (Addition) und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ (Multiplikation) auf. Welche bekannten Gruppen sind dazu isomoph?