Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

8. Übungsblatt

Relationen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

Gegeben ist die Menge $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ und die Relation

$$R \quad = \quad \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ ist ein Teiler von } b \in \mathbb{N}\}.$$

Welche der Eigenschaften *reflexiv*, *irreflexiv*, *symmetrisch*, *antisymmetrisch*, *transitiv* sind für die Relation R zutreffend? Begründen Sie Ihre Entscheidungen (Gegenbeispiel oder Beweis)!

Ü43 (a) In der Tabelle sind eine Reihe von Relationen auf der Menge $\mathbb{Z}$ angegeben. Kreuzen Sie alle diejenigen Eigenschaften an, die auf die Relationen zutreffen:

	$<$	$\leq$	$=$	$\{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$	$\{(x, y) \mid \lvert x-y \rvert \leq 1\}$
reflexiv					
irreflexiv					
symmetrisch					
antisymmetrisch					
transitiv					

(b) Können die Eigenschaften *irreflexiv*, *symmetrisch* und *transitiv* bei einer nichtleeren binären Relation gemeinsam auftreten?

Ü44 (a) Auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ist folgende Relation gegeben:

$$\begin{aligned} R \quad = \quad & \Delta_A \cup \{(1,9), (2,4), (2,5), (2,7), (3,6), (4,2), (4,5), (4,7), \\ & (5,2), (5,4), (5,7), (6,3), (7,2), (7,4), (7,5), (9,1)\}\,. \end{aligned}$$

(1) Zeichnen Sie den der Relation zugeordneten gerichteten Graphen $G = (A, R)$.

(2) Prüfen Sie nach, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

(3) Durch $S = \Delta_A \cup \{(1, 3), (2, 8), (3, 1), (8, 2)\}$ ist eine weitere Äquivalenzrelation auf A gegeben. Bestimmen Sie die transitive Hülle von $R \cup S$.

(b) Beweisen Sie, dass die Relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod 5\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen von R und die Faktormenge $\mathbb{Z}/R$ an.

Beweisen Sie außerdem: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z} :\ (a, b) \in R \wedge (c, d) \in R \Rightarrow (a \cdot c, b \cdot d) \in R$

(d.h. R ist eine *Kongruenzrelation* auf $\mathbb{Z}$ bzgl. der Multiplikation).

Ü45 Untersuchen Sie, für die folgenden Relationen R und Mengen A, ob sie Äquivalenzrelationen sind und geben Sie ggf. die Äquivalenzklassen an.

(a) $A = \mathbb{R}$, $\quad R = \{(a, b) \in A \times A \mid\ \lvert a - b \rvert < \pi\}$.

(b) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $(a, b)R(c, d)$ gdw. $ad = bc$. (Welche Eigenschaften geht für $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ verloren?)

(c) Es sei A die Menge aller Felder eines Schachbretts. Für beliebige zwei Felder u und v gelte $(u, v) \in R$ genau dann, wenn ein Läufer von Feld u mit einem oder mehreren Zügen auf Feld v gelangen kann. Was ändert sich, wenn nur genau ein Zug erlaubt ist?

A46 **Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Matrikelnummer abgeben.**

(a) Es wird auf der Menge $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 18 \text{ und } \mathrm{ggT}(n, 18) = 1\}$ die Relation

$$R = \{(a, b) \in A \times A \ \mid \ a \equiv b + 2 \ (\mathrm{mod}\, 4)\}$$

betrachtet. Bestimmen Sie alle Elemente der Menge R.

Die Relation lässt sich durch einen ungerichteten Graphen beschreiben (Warum?). Zeichnen Sie ein Diagramm dieses Graphen.

Welche der Eigenschaften *reflexiv*, *irreflexiv*, *antisymmetrisch*, *transitiv* besitzt R, welche nicht? Begründen Sie Ihre Entscheidungen (Gegenbeispiel oder Beweis)!

(b) Auf der Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ wird die Relation

$$R = \Delta_A \cup \{(0, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 0), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 3)\}.$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen von R an.

H47 Welche der Eigenschaften *reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv* besitzen die beiden Relationen

(a) $R_1 = \{(a, b) \in A \times A \mid \mathrm{ggT}(a, b) > 1\}$ (b) $R_2 = \{(a, b) \in A \times A \mid \mathrm{ggT}(a, b) = 1\}$

auf der Menge $A = \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15\}$? Begründen Sie Ihre Entscheidungen (Gegenbeispiel oder Beweis)! Handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

H48 (a) Bestimmen Sie auf der Menge $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$ eine Äquivalenzrelation R derart, dass für die Partition $\mathcal{P} = \{\{1, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{5\}\}$ gilt $\mathcal{P} = A/R$.

(b) Zeigen Sie, dass auf der Menge aller Paare natürlicher Zahlen $A = \mathbb{N}^2$ durch

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \mid a + d = c + b\}$$

eine Äquivalenzrelation definiert ist. Durch die Äquivalenzklassen lassen sich die ganzen Zahlen definieren. Geben Sie die Äquivalenzklasse $(0, 1)/R$ konkret an. Welche Eigenschaft haben alle Paare $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ gemeinsam, die in ein und derselben Äquivalenzklasse liegen?