

Algebra für Informationssystemtechniker – Sommersemester 2018

9. Übungsblatt

Halbgruppen, Monoide, Gruppen

Vorbereitungsaufgabe: Bitte bereiten Sie diese Aufgabe zur Übung vor.

- Zeigen Sie, dass das Paar (H, \circ) mit der Menge $H := \{1, 2, \dots, 100\}$ und der Operation \circ , die durch $x \circ y := \min\{x, y\}$ ($x, y \in M$) definiert ist, eine Halbgruppe ist. Ist (H, \circ) auch ein Monoid? Was ändert sich, wenn die Menge H durch \mathbb{R} ersetzt wird?
 - Kann es mehrere neutrale Elemente in Monoiden geben? Geben Sie ein Beispiel an oder beweisen Sie, dass dies nicht möglich ist.
-

Ü49 Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen M mit den angegebenen Operationen Halbgruppen, Monoide oder Gruppen sind. Welche der Operationen sind kommutativ?

- (a) $M = \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in M : x \circ y := x + y - x \cdot y$,
(mit der üblichen Multiplikation \cdot und Addition $+$ der reellen Zahlen)
- (b) $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, $\forall (r_1, \varphi_1), (r_2, \varphi_2) \in M : (r_1, \varphi_1) \circ (r_2, \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$,
(mit der üblichen Multiplikation \cdot und Addition $+$ der reellen Zahlen)
- (c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit der üblichen Matrizenmultiplikation.

Ü50 Beweisen Sie:

- (a) Der Durchschnitt zweier Unterhalbgruppen U, V einer Halbgruppe (H, \circ) ist eine Unterhalbgruppe oder \emptyset .
- (b) Für jedes Element a eines Monoids (H, \circ) existiert höchstens ein $b \in H$ mit

$$a \circ b = b \circ a = e.$$

Ü51 (a) Finden Sie alle Unterhalbgruppen der Halbgruppe (H, \circ) , die durch die nebenstehende Verknüpfungstafel definiert ist.

Gibt es unter diesen Unterhalbgruppen solche, die mit der Operation \circ Monoide oder sogar Gruppen bilden?

\circ	1	2	3	4
1	3	2	3	4
2	2	4	2	3
3	3	2	3	4
4	4	3	4	2

(b) Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $M = \{f : A \rightarrow A\}$. Es werden zwei Abbildungen $f_1, f_2 \in M$ betrachtet, die folgendermaßen definiert sind:

$$f_1(a) = a, f_1(b) = f_1(c) = b \quad \text{und} \quad f_2(a) = b, f_2(b) = g(c) = a.$$

Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{f_1, f_2\}$ von M mit der Hintereinanderausführung \circ von Abbildungen ein Monoid bildet. Handelt es sich um ein Untermonoid des Monoids (M, \circ) ?

A52 Die Lösung dieser Hausaufgabe, bitte vor Beginn der nächsten Übung unter Angabe Ihres Namens und Ihrer Matrikelnummer abgeben.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen H mit den zugehörigen Operationen Halbgruppen, Monoide oder Gruppen bilden:

- (a) beliebige Menge H mit $|H| \geq 2$ und der Operation: $x \circ y := y \quad \forall x, y \in H$.
- (b) die Potenzmenge $H = \mathcal{P}(S)$ einer endlichen Menge S mit dem Durchschnitt \cap .

H53 (a) Untersuchen Sie die Menge der geraden natürlichen Zahlen und die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen darauf, ob sie mit der üblichen Addition bzw. mit der üblichen Multiplikation eine Halbgruppe oder sogar ein Monoid bilden.

- (b) Es bezeichne A^* die Menge aller endlichen Zeichenketten ("Wörter"), die sich aus dem Alphabet $A = \{a, b, \dots, z\}$ bilden lassen, zusammen mit dem leeren Wort ϵ . Als Operation $\circ_{\mathbb{A}}$ auf A^* sei die Verkettung der Wörter $w_1 \circ_{\mathbb{A}} w_2 = w_1 w_2$ für alle $w_1, w_2 \in A^*$ betrachtet (Konkatenation).

Zeigen Sie, dass A^* mit dieser Operation ein Monoid bildet. Handelt es sich sogar um eine Gruppe?

H54 Wir definieren eine „Sprache“ S auf dem Alphabet $\mathcal{A} = \{M, U\}$ durch folgende Regeln:

- (MU1) MU ist ein Wort.
- (MU2) Ist Mx ein Wort, dann ist auch MxU ein Wort (x steht hier für eine beliebige Zeichenkette).
- (MU3) Sind x und y Wörter aus S , dann ist auch xy ein Wort aus S .
- (MU4) Es gilt $UUU = M$.
- (MU5) Es gilt $MMM = MM$.

- (a) Finden Sie alle „Wörter“ der Sprache (jedes Wort müssen Sie nur in einer Schreibweise angeben, z.B. $MUUU$ **oder** MM) und begründen Sie, warum keine weiteren existieren.

- (b) Stellen Sie eine Verknüpfungstafel von (S, \circ) (die Verknüpfung \circ ist die Konkatenation/Verkettung) der Wörter auf.

- (c) Ist (S, \circ) eine Halbgruppe? Ist (S, \circ) ein Monoid? Ist (S, \circ) eine Gruppe?

Ersetzen Sie Regel [MU5] durch die folgende Regel

- (MU5') $MUMU = MU$.

und führen Sie für die so entstehende Sprache S' dieselben Untersuchungen wie für S durch.

Tipp: In dem Buch „Gödel, Escher, Bach“ von Douglas A. Hofstadter finden Sie das MU-Rätsel, welches zu dieser Aufgabe inspirierte.