Algebra für Informationssystemtechniker – SoSe 2018

Wiederholungaufgaben 1. Semester

Ü1 Überprüfen Sie, ob die Mengenoperation $\setminus$ assoziativ ist, d.h ob für beliebige Mengen A, B und C gilt:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C \ .$$

Beweis oderGegenbeispiel.

Ü2 (a) Bestimmen Sie für die Menge M={Apfel,Birne,Pflaume} die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

(b) Es sei
$A = \{0,1\}^3 = \Big\{(z_1, z_2, z_3) \mid z_k \in \{0,1\}$ für $k = 1,2,3\Big\}$.
Berechnen Sie $|\mathcal{P}(A)|$.

Ü3 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

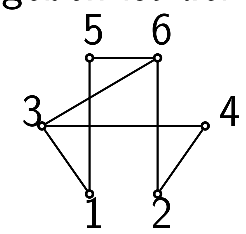
(b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.
Finden Sie hier auch einen Beweis ohne Induktion?

Ü4 Bestimmen Sie alle $n \in N$, für die $\binom{n}{5} < \binom{n}{6}$ gilt.

Ü5 Geben Sie alle zusammenhängenden Graphen mit 5 Knoten bis auf Isomorphie (durch unbeschriftete Diagramme) an.

Ü6 Geben Sie, falls möglich, einen Graphen $G = (V, E)$ durch ein Diagramm an, der 4-regulär ist und 12 Kanten hat.

Ü7 Gegeben ist der Graph $G = (V, E)$ durch das Diagramm:



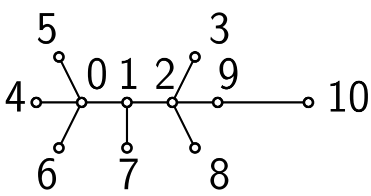
(a) Bestimmen Sie alle Wege vom Knoten 2 zum Knoten 5.

(b) Untersuchen Sie, ob der Graph bipartit ist.

(c) Ist G planar? Berechnen Sie die Anzahl Flächen mit der eulerschen Polyederformel.

Ü8 In einem Chinesisch-Sprachkurs gibt es 9 Teilnehmer. Jeder schickt zu dreien der anderen Teilnehmer je eine Postkarte, natürlich auf Chinesisch. Kann es passieren, dass jeder Teilnehmer genau von denjenigen Teilnehmern Postkarten bekommt, an die er die Postkarten geschickt hat?

Ü9 (a) Bestimmen Sie den Prüfer-Code des folgenden Baumes



(b) Bestimmen Sie den Baum, der die Knotenmenge $V = \{0, 1, \ldots, 8\}$ und den Prüfer-Code $(3, 2, 1, 3, 2, 2, 1)$ besitzt, und zeichnen Sie ein Diagramm dieses Baumes.

Ü10 Wie viele Spannbäume hat der Graph

$$H = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\},\{2,5\}\})\,?$$

Ü11 Es sei $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Wir betrachten den Graph $G_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ und $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E_n$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

$$y_1 = y_2 \text{ und } (\,x_1 - x_2 \equiv 1\,(\text{ mod } n) \text{ oder } x_1 - x_2 \equiv -1\,(\text{ mod } n)\,)$$
$$x_1 = x_2 \text{ und } (\,y_1 - y_2 \equiv 1\,(\text{ mod } n) \text{ oder } y_1 - y_2 \equiv -1\,(\text{ mod } n)\,)$$

Zeichnen Sie jeweils ein Diagramm von G_2 und G_3.

Ü12 Betrachtet wird der Restklassenring $(\mathbb{Z}_{17}, +, \cdot)$.

(a) Berechnen Sie 10^{-1} mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus.

(b) Ermitteln Sie alle $x \in \mathbb{Z}_{17}$, die die Gleichung

$$7^{34} \cdot x \equiv 10 \pmod{17}$$

erfüllen.