TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – SoSe 2018

Wiederholungaufgaben 1. & 2. Semester

Ü1 Beweisen Sie, dass das Quadrat jeder natürlichen Zahl n bei Division durch 4 den Rest 0 oder 1 lässt.

Ü2 Berechnen Sie die Zahl $79^{218} \pmod{19}$ mit der Methode Square & Multiply.

Ü3 Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Die Potenzmenge einer n-elementigen Menge hat stets 2^n Elemente.

Ü4 Wir betrachten den folgenden Graphen $G = (V, E)$:
Die Knotenmenge ist $V = \mathbb{Z}_6$. Zwei Knoten $v, w \in \mathbb{Z}_6$ sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie verschieden sind und wenn gilt:

$$v \equiv w \pmod 2 \qquad \text{oder} \qquad v \equiv w \pmod 3$$

(a) Zeichnen Sie ein Diagramm und untersuchen Sie, ob der Graph planar ist.

(b) Geben Sie zwei nichtisomorphe Spannbäume T_1 und T_2 von G an.

Ü5 Es wird der Restklassenring $(\mathbb{Z}_{120}, +, \cdot)$ betrachtet.

(a) Wie viele Elemente $x \in \mathbb{Z}_{120}$ besitzen ein multiplikatives Inverses?

(b) Berechnen Sie die multiplikativen Inversen zu $a = 11$, $b = 33$ und $c = 49$ in $\mathbb{Z}_{120}$ (falls sie existieren) mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus.

(c) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $133^{66} \cdot x = 3$ in $\mathbb{Z}_{120}$.

Ü6 Es sei $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$ und $S := \langle \sigma \rangle$ die von σ erzeugte Untergruppe von $(S_9, \circ)$.

(a) Geben Sie σ in Zyklenschreibweise an, und berechnen Sie die Ordnung von S.

(b) Geben Sie die beiden Mengen $A := \{\tau(1) \mid \tau \in S\}$ und $B := \{\tau \in S \mid \tau(1) = 1\}$ jeweils als Menge konkreter Elemente an.

(c) Bestimmen Sie $\alpha := \sigma \circ (1\ 3)(2\ 6\ 8) \circ \sigma$ und α^{-1} in Zyklenschreibweise.

Ü7 Die Symmetriegruppe des Quadrates, d.h. die Diedergruppe $(D_4, \circ)$, hat die Elemente:

Drehungen:

$\sigma_0 = \text{id}$

$\sigma_1 = (1\,2\,3\,4)$

$\sigma_2 = (1\,3)(2\,4) = \sigma_2^{-1}$

$\sigma_3 = (1\,4\,3\,2) = \sigma_1^{-1}$

Spiegelungen:

$s_1 = (1\,2)(3\,4) = s_1^{-1}$

$s_2 = (1\,3) = s_2^{-1}$

$s_3 = (1\,4)(2\,3) = s_3^{-1}$

$s_4 = (2\,4) = s_4^{-1}$

und die Gruppentafel:

$\circ$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	s_1	s_2	s_3	s_4
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	s_1	s_2	s_3	s_4
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0	s_2	s_3	s_4	s_1
σ_2	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1	s_3	s_4	s_1	s_2
σ_3	σ_3	σ_0	σ_1	σ_2	s_4	s_1	s_2	s_3
s_1	s_1	s_4	s_3	s_2	σ_0	σ_3	σ_2	σ_1
s_2	s_2	s_1	s_4	s_3	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2
s_3	s_3	s_2	s_1	s_4	σ_2	σ_1	σ_0	σ_3
s_4	s_4	s_3	s_2	s_1	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

(a) Ist $(D_4, \circ)$ abelsch?

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $(D_4, \circ)$ und begründen Sie, warum es keine weiteren gibt. Welche der Untergruppen sind zyklisch?

(c) Geben Sie für eine Untergruppe, die σ_2 enthält und weniger als 8 Elemente besitzt, alle Linksnebenklassen an.

(d) Ist $(D_4, \circ)$ zu $(\mathbb{Z}_8, +)$ isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort!

Ü8 Beweisen Sie, dass die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Unterring von $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ mit der üblichen Matrizenaddition und - multiplikation bildet (Es kann als bekannt vorausgesetzt werden, dass beide Operationen assoziativ sind und die Distributivgesetze gelten).

Welches sind die Einheiten?

Ist $(U, +, \cdot)$ ein Integritätsring oder sogar ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort!