TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Noack

Algebra für Informationssystemtechniker – SoSe 2018

Wiederholungaufgaben 1. & 2. Semester

Ü1 (a) Es sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Geben Sie für den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \binom{M}{2}, \qquad E = \binom{V}{2} \setminus \{\{A, B\} \mid A, B \in V, A \cap B = \emptyset\}$$

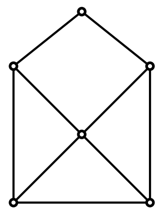
die Knotenanzahl, die Knotengrade und die Kantenanzahl an.

(b) Zeichnen Sie das Diagramm eines zusammenhängenden 3-regulären Graphen G mit der Knotenmenge $V := \{1, 2, \ldots, 8\}$, der nicht bipartit ist. Begründen Sie, dass G kein bipartiter Graph ist.

(c) Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit der Knotenanzahl n ($n \geq 3$), der keinen Kreis enthält und genau 3 Komponenten hat. Bestimmen Sie die Kantenanzahl von G in Abhängigkeit von n.

(d) Welche besondere Eigenschaft hat der Prüfer-Code $(a_1, a_2, \ldots a_{n-2})$ eines Baumes, wenn der Baum ein Weg ist?

Ü2 Geben Sie für den durch das nebenstehende Diagramm definierten Graphen $G = (V, E)$ alle nicht-isomorphen Spannbäume durch Diagramme an.



Ü3 (a) Beweisen Sie: Das Produkt von 4 aufeinander folgenden Zahlen ist stets durch 24 teilbar.

(b) Berechnen Sie die letzten zwei Ziffern der Zahl 11^{888}.

Ü4 Betrachtet wird die Gruppe $(\mathbb{Z}_{19}^*, \cdot)$.

(a) Zeigen Sie, dass 2 ein Erzeuger von $\mathbb{Z}_{19}^*$ ist.

(b) Wie viele Erzeuger gibt es in $\mathbb{Z}_{19}^*$? Bestimmen Sie alle Erzeuger.

(c) Untergruppen welcher Ordnung besitzt die Gruppe $(\mathbb{Z}_{19}^*, \cdot)$?

(d) Bestimmen Sie die kleinste Untergruppe von $(\mathbb{Z}_{19}^*, \cdot)$, die das Element 7 enthält, und alle Linksnebenklassen dieser Untergruppe.

(e) Verwenden Sie Potenzen des Erzeugers 2, um eine Untergruppe der Ordnung 9 von $(\mathbb{Z}_{19}^*, \cdot)$ und ihre Linksnebenklassen anzugeben.

Ü5 Gegeben sind auf der Menge $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ die zwei Permutationen:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \beta = (1\ 5\ 4) \circ (1\ 2\ 7\ 8\ 5) \circ (2\ 3\ 10)\ .$$

(a) Geben Sie α, β und $(\alpha^{15} \circ \beta^9)^{-1}$ in Zyklenschreibweise an.

(b) Bestimmen Sie das Signum von α.

(c) Untersuchen Sie, ob $M = \{\sigma \in S_{10} \mid \sigma(1) = 2\}$ eine Untergruppe von $(S_{10}, \circ)$ bildet.

Ü6 Gegeben ist die Gruppe $G = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ mit der folgenden Verknüpfungstafel:

$\circ$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_2	s_2	s_3	s_1	s_6	s_4	s_5
s_3	s_3	s_1	s_2	s_5	s_6	s_4
s_4	s_4	s_5	s_6	s_1	s_2	s_3
s_5	s_5	s_6	s_4	s_3	s_1	s_2
s_6	s_6	s_4	s_5	s_2	s_3	s_1

(a) Finden Sie alle Untergruppen von G und geben Sie deren Ordnungen an.

(b) Ermitteln für eine nichttriviale Untergruppe die Zerlegung von G in Linksnebenklassen.

(c) Ist G abelsch? Ist G zyklisch?

Ü7 Es wird der Ring $(\mathbb{Z}_2[x]/x^3 + x^2 + 1, \oplus, \otimes)$ betrachtet.

(a) Wie viele Elemente enthält dieser Ring?

(b) Berechnen Sie zu jeder Einheit des Ringes das multiplikative Inverse.

(c) Berechnen Sie x^7 in diesem Ring.

(d) Ist $(\mathbb{Z}_2[x]/x^3 + x^2 + 1, \oplus, \otimes)$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort!