Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110

Erste Modulprüfung – Aufgaben zur Vorbereitung

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.
- Die Benutzung elektronischer Geräte ist in der Klausur nicht gestattet.

Beachten Sie: Dies ist nur **eine Aufgabenauswahl** aus den behandelten Themen!

1. Entscheiden Sie, ob der gegebene aussagenlogische Ausdruck erfüllbar ist. Falls ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an. Falls nein, beweisen Sie, dass der Ausdruck unerfüllbar ist.
   (a) $(\neg Y \vee \neg Z \vee X) \wedge Z \wedge (\neg Z \vee Y) \wedge (\neg Y \vee \neg X)$.
   (b) $(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg U) \wedge (U \vee \neg V) \wedge (V \vee W)$.

2. Betrachtet werden die Mengen $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$.
   Beweisen oder widerlegen Sie:
   - $\{6x \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq A \cap B$
   - $\{5x \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq A \cup B$

3. Gegeben sind die Menge $A = \big\{(z_1, z_2) \mid z_k \in \{0,1\} \text{ für } k = 1,2\big\}$ und die Abbildung $f\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1,2,3,4\}$, die durch $f(M) = |M|$ für $M \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ definiert ist.
   (a) Berechnen Sie $\big|\mathcal{P}(A)\big|$.
   (b) Ist die Abbildung f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv? Begründen Sie!
   (c) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{3\})$.

4. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

5. Betrachtet werden die beiden natürlichen Zahlen $a = 138$ und $b = 162$.
   (a) Bestimmen Sie für beide Zahlen a und b die Primfaktorzerlegung und und zeichnen Sie jeweils ein Teilerdiagramm.
   (b) Berechnen Sie die Bilder von a und b unter der Eulerschen Phi-Funktion φ.
   (c) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(a,b)$ mit dem Euklidischen Algorithmus, und bestimmen Sie eine Darstellung $\mathrm{ggT}(a,b) = sa + tb$ für $s,t \in \mathbb{Z}$.

6. Es sei $(M, \heartsuit)$ ein Monoid mit neutralem Element e, und es bezeichne $M^* \subseteq M$ die Menge aller invertierbaren Elemente von $(M, \heartsuit)$, d.h. $M^* = \{a \in M \mid \exists b \in M : a \heartsuit b = b \heartsuit a = e\}$.
   Zeigen Sie, dass $(M^*, \heartsuit)$ eine Gruppe ist.

7. (a) Berechnen Sie für die komplexe Zahl $z = \mathrm{i}^5 - \dfrac{5 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^3}{1 + 4\mathrm{i}}$ Realteil und Imaginärteil.

   (b) Gesucht sind alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $z^4 + 2^4 = 0$ erfüllen.

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

8. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & \alpha & 6 \\ 3 & 1 & -4 & -14 \end{pmatrix} \qquad \text{und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

   und reellen Parametern α und β.

   (a) Finden Sie alle Wertepaare (α, β), für die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ nicht lösbar ist. Verwenden Sie dazu das Gauss-Verfahren.

   (b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ für $\alpha = 1$ und $\beta = -4$, und geben Sie die Lösungsmenge in Mengenschreibweise an.
   Wie lautet die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems?

9. Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ werden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ betrachtet. Zeigen Sie, dass B die Inverse zu A ist.

10. (a) Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2b + c \\ 0 \\ a - b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist.
   Bestimmen Sie eine Basis dieses Untervektorraums.

   (b) Es sei V ein K-Vektorraum, $u, v, w \in V$ und $\{u, v, w\}$ sei linear unabhängig.
   Beweisen Sie, dass $\{u + v + w, u + v, v + w\}$ linear unabhängig ist.

11. Über dem Körper $K = \mathrm{GF}(2)$ ist die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   (a) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Col}(H)$.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(H)$. Wie viele Elemente enthält $\mathrm{Ker}(H)$?