TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Zumbrägel

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–1

Erste Modulprüfung am 09.12.2016

Name, Vorname			Matrikelnummer, Studiengang			Unterschrift
....			....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	$\sum$ (100 P)	Z (10 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = \frac{2-i}{i^3 + (i-1)^2 + 2i + 3} \ .$$

(b) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = \dfrac{2-i}{i^{15}}$.

(c) Finden Sie eine Lösung der Gleichung $z^3 = -i$ in $\mathbb{C}$. Wie viele Lösungen hat diese Gleichung in $\mathbb{C}$? Bestimmen Sie für jede dieser Lösungen Betrag und Argument.

2. (a) Gegeben sind vier Vekoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_4 := \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, die eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und u, v seien linear unabhängige Vektoren aus V. Es sei $T := \{u + 2v, 2u + v\}$. Untersuchen Sie, ob $u \in \mathrm{Span}(T)$ gilt und stellen Sie – falls möglich – u als Linearkombination der Elemente von T dar.
Welche Dimension hat $\mathrm{Span}(T)$?

3. Es sei $A = \{1, 2, 3\}$ eine Menge und $\mathfrak{P}(A)$ bezeichne die Potenzmenge von A.

   (a) Bestimmen Sie die Kardinalität (Mächtigkeit) der Menge $B := A \times (\mathfrak{P}(A) \setminus \{\emptyset\})$.

   (b) Es wird die Menge $C := \{(x, X) \in B \mid x \in X\}$ betrachtet.
   Schreiben Sie ein Element von C auf, für das $x = 2$ gilt.
   Wie viele Elemente besitzt C? Schreiben Sie alle Elemente von C einzeln auf.

   (c) Wir betrachten nun die Relation $R \subseteq C \times C$, die folgendermaßen definiert ist:

   $$(x, X)\, R\, (y, Y) :\Longleftrightarrow\ x = y\ \vee\ X = Y.$$

   Zeigen Sie, dass die Relation R nicht transitiv ist.

   (d) Begründen Sie, dass R keine Äquivalenzrelation ist.

4. (a) Geben Sie ein Teilerdiagramm der Zahl 45 an.

   (b) Ist $(\mathbb{Z}_{45}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 45 ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl 28. Begründen Sie (ohne Rechnung), dass das multiplikative Inverse 28^{-1} des Elements 28 in $\mathbb{Z}_{45}$ existiert.

   (d) Bestimmen Sie nun das multiplikative Inverse 28^{-1} in $\mathbb{Z}_{45}$.

   (e) Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$, die Lösung der Gleichung $28x \equiv 17 \pmod{45}$ sind.

   (f) Geben Sie ein $m \in \mathbb{Z}_{45}$ an, welches kein multiplikatives Inverses besitzt. Begründen Sie diese Eigenschaft.

Zusatz 5. (a) Beweisen Sie, dass für jede Primzahl p gilt:

   $$\forall k \in \{1, \ldots, p-1\} : \quad p \mid \binom{p}{k}.$$

   (b) Es sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim(V) = n > 0$, und es seien b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Elemente einer Basis von V. Beweisen Sie, dass für jeden Vektor $v \in V$ sein Koordinatenvektor bezüglich der angeordneten Basis $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ eindeutig bestimmt ist.