TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Prof. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–1

Erste Modulprüfung am 15.12.2017

<table>
<tr><td colspan="3">Name, Vorname; Studiengang</td><td colspan="3">Matrikelnummer</td><td></td><td>Unterschrift</td></tr>
<tr><td colspan="3">.................................</td><td colspan="4">...</td><td>...........</td></tr>
<tr><td>A1 (20 P)</td><td>A2 (20 P)</td><td>A3 (20 P)</td><td>A4 (20 P)</td><td>A5 (20 P)</td><td>Z6 (10 P)</td><td>$\sum$ (110 P)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Gegeben ist die komplexe Zahl
$$z := \left(\frac{2i}{1-i}\right)^9 .$$
Berechnen Sie den Realteil $\mathrm{Re}(z)$ und den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$ von z, und stellen Sie z in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ dar.

   (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 3 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ a+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

2. Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$.

   Die Spaltenvektoren von A seien mit $s_1, s_2, \ldots, s_5$ bezeichnet.

   (a) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von A und den Rang von A.

   (b) Finden Sie alle Basen von $\mathrm{Col}(A)$, die aus Spaltenvektoren der Matrix A bestehen.

   (c) Ermitteln Sie alle Vektoren $b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung hat.

   (d) Untersuchen Sie, ob der Vektor $v := (1, 1, 0, 1, 1)$ in $\mathrm{Row}(A)$ enthalten ist.

3. (a) Entscheiden Sie, ob die gegebenen aussagenlogischen Ausdrücke erfüllbar sind. Falls ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an. Falls nein, beweisen Sie, dass der Ausdruck unerfüllbar ist.

    (1) $(\neg Y \vee \neg Z \vee X) \wedge Z \wedge (\neg Z \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee X)$

    (2) $(U \vee V \vee W) \wedge (\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee \neg U) \wedge (U \vee \neg V) \wedge (V \vee U)$

   (b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{1}{2}n(3n-1).$$

4. Betrachten Sie die Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$.

   (a) Wie viele Elemente hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(A \times B)$?

   (b) Es sei $f : A \times B \to \mathbb{Z}_5$ definiert durch

$$f(a, b) = a + b^2 \mod 5.$$

   Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

   (c) Bestimmen Sie die Anzahl injektiver Abbildungen $g : A \to B$.

5. Betrachtet wird $\mathbb{Z}_{21}$ mit der Addition und Multiplikation modulo 21.

   (a) Welche der drei Zahlen 10, 11, 12 sind Nullteiler in $\mathbb{Z}_{21}$, welche sind Einheiten? (Begründen Sie kurz!)

   (b) Wie viele Elemente hat die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{21}^*$? Bestimmen Sie die Ordnung des Elements 5 in dieser Gruppe.

   (c) Finden Sie alle $x \in \mathbb{Z}_{21}$, die die Gleichung $\left(2^{64} + 1\right) x + 11 = 5 \pmod{21}$ erfüllen.

Zusatz 6. (a) Es sei A eine fest vorgegebene Matrix aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Beweisen Sie, dass die Menge $M := \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A \cdot B = B \cdot A\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

   (b) Es sei U eine Untergruppe einer Gruppe G mit der Verknüpfung $\circ$. Beweisen Sie folgende Aussage: $\forall\, g_1, g_2 \in G: \quad g_1 \in g_2 \circ U \;\Rightarrow\; g_1 \circ U = g_2 \circ U.$