TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Jun.-Prof. Schneider

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–1

Erste Modulprüfung am 14.12.2018

Name, Vorname			Matrikelnummer, Studiengang			Unterschrift
....			....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	Z (10 P)	$\sum$ (110 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Es sind die reguläre Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben.
   Berechnen Sie die Matrix A^{-1} mittels des Gauss/Jordan-Verfahrens.
   Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

   (b) Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.
   Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahl $w = z^n + \overline{z}^n$ in Abhängigkeit von Betrag und Argument von z.

   (c) Untersuchen Sie, für welche Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; z_1 + z_2 = \alpha \right\}$$

   einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^2$ bildet.

2. Es sei $A := \begin{pmatrix} a & 1 & a^2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ a & 3 & a^2 & 3 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix.

   (a) Bestimmen Sie für $a = 0$ den Rang von A, eine Basis des Kerns von A und eine Basis des Spaltenraums von A.

   (b) Bestimmen Sie eine maximale Menge linear unabhängiger Spaltenvektoren von A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

3. (a) Zeigen Sie, dass für alle Aussagen A, B, C gilt:

$$\big(A \Rightarrow (B \vee \neg C)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad B \vee \neg(A \wedge C).$$

(b) Gegeben ist die Abbildung $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \min\{x^2, 11\}$.

- Ist f injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Bestimmen Sie das Bild $\operatorname{im}(f)$.
- Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}\big(\{8, 9\}\big)$.

(c) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, ist

$$\sum_{k=1}^{n} (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}\,.$$

4. Betrachtet werden die natürlichen Zahlen $m := 35$ und $n := 66$.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' den größten gemeinsamen Teiler $\operatorname{ggT}(m, n)$, sowie eine Darstellung $\operatorname{ggT}(m, n) = am + bn$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.

(b) Ist $\mathbb{Z}_n$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort!

(c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von m und n, und berechnen Sie $\varphi(m)$ und $\varphi(n)$.

(d) Geben Sie die Teilermengen $T(m)$ und $T(n)$ an, und zeichnen Sie die zugehörigen Teilerdiagramme.

(e) Gibt es eine bijektive Abbildung $f\colon T(n) \to T(255)$, so dass für alle $x, y \in T(n)$ gilt: $x \mid y \Leftrightarrow f(x) \mid f(y)$? Falls ja, geben Sie ein solches f an, falls nein, beweisen Sie, dass es keine solche Abbildung gibt.

$\boxed{\text{Zusatz}}$ 5. Es sei $(G, *)$ eine Gruppe, und es sei $g \in G$. Weiter sei $\bullet\colon G \times G \to G$ durch

$$a \bullet b := a * g * b \qquad \text{für alle } a, b \in G$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(G, \bullet)$ eine Gruppe ist.