TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Prof. M. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF - 110

Erste Modulprüfung am 13.12.2019

Name, Vorname			Matrikelnr. / Studiengang			Unterschrift
....			....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	$\sum$ (100 P)	Z (10 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- **Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.**
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden und mit dem Namen zu beschriften.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$z := \left(i \cdot \frac{(i+2)^2 + 3i}{14i + 6} - 1 \right)^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\, a + b = 0 \right\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bildet.

2

(a) Berechnen Sie die Dimension von $\operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2b \end{pmatrix} \right\} \right)$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Betrachtet wird die parametrisierte Matrix $A_{a,b} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, dass $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ nicht in $\operatorname{Col}(A_{1,3})$ liegt.

(2) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von $A_{a,b}$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b.

3

(a) Es sind die Mengen $A := \{(m,n) \mid m \in \{1,2,3\}, n \in \{3,4\}\}$ und $B := \{1,2,3,4,5,6\}$ gegeben.

(1) Berechnen Sie $|\mathcal{P}(A)|$.

(2) Ist die Abbildung $f : A \to B$ mit $f\big((m,n)\big) := \binom{n}{m}$ injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Beweisen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

4

(a) Es stehen zwei kleine Gläser ohne Markierungen, ein hinreichend großer Eimer und unbegrenzt Wasser bereit. In das eine Glas passen genau 84 Milliliter Wasser, in das andere Glas genau 109 Milliliter. Wie kann man mit diesen drei Gefäßen genau 1 Milliliter Wasser abmessen?

(b) Finden Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{Z}_{84}$ für die Gleichung $109 \cdot z + 87^{23} \equiv 2$ (mod 84).

Z

Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Symmetriegruppe eines Quaders mit Seitenlängen 1 cm, 2 cm und 3 cm.

Geben Sie alle Elemente dieser Symmetriegruppe als Permutationen der Eckpunkte in Zyklenschreibweise an.