TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Prof. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–1

Erste Modulprüfung am 27.05.2016

Name, Vorname; Studiengang			Matrikelnummer				Unterschrift
....			....				....
A1 (20 P)	A2 (20 P)	A3 (20 P)	A4 (20 P)	A5 (20 P)	Z6 (10 P)	$\sum$ (110 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahl $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.

   (b) Zeichnen Sie die komplexe Zahl $w = 2e^{\frac{\pi}{4}i}$ in der Gaußschen Zahlenebene. Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil von w.

   (c) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $(z+i)^2 + i = 0$ in $\mathbb{C}$ in kartesischer Form an.

2. (a) Begründen Sie, dass die Menge $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ bildet, und bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U.

   (b) Es seien

   $$V_1 := \operatorname{Span}(\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}) \text{ und } V_2 := \operatorname{Span}(\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}).$$

   Ermitteln Sie für V_1, V_2 und für $V_1 \cap V_2$ jeweils eine Basis und die Dimension.

3. (a) Beweisen Sie: Für alle endlichen Mengen A und B gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle endlichen Mengen A, B, C gilt

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gegeben. Bestimmen Sie die Anzahl Elemente der Menge

$$M := \{\, S \;\mid\; \emptyset \subsetneq S \subsetneq \{1, \ldots, n\} \,\}$$

(in Abhängigkeit von n).

4. Es sei $S = \{0, 1, 2\}$. Betrachten Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : S \times S &\to \mathbb{Z}_7 \\ (m, n) &\mapsto m - n + mn \mod 7. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0\})$ und $f^{-1}(\{1\})$.

(b) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

5. Betrachtet wird der Ring $R = \mathbb{Z}_{20}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 20.

(a) Wie viele Einheiten hat R?

(b) Es sei $G = R^*$ die multiplikative Gruppe der Einheiten.

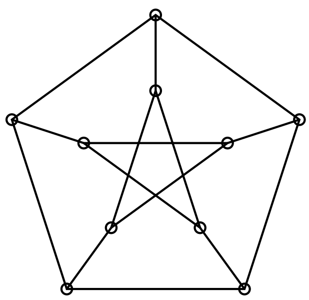
(i) Welche natürlichen Zahlen n mit $0 \leq n \leq 20$ können nicht Ordnung einer Untergruppe von G sein? (Begründen Sie!)

(ii) Bestimmen Sie die Ordnung des Elementes 3 in G.

(c) Ermitteln Sie alle $x \in R$, für die gilt

$$7^{26} \cdot x = 3 \pmod{20}\ .$$

Zusatz 6. (a) Besitzt der folgende Graph einen Eulerkreis? Ist er zweifach zusammenhängend? (Beweisen Sie Ihre Antworten!)



(b) Es seien v_1, v_2, v_3 paarweise verschiedene Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann ist jeder Vektor v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ Linearkombination der anderen zwei Vektoren aus $\{v_1, v_2, v_3\}$.