Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Zumbrägel

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–1

Erste Modulprüfung am 12.05.2017

<table>
<tr><td colspan="3">Name, Vorname</td><td colspan="2">Matrikelnummer, Studiengang</td><td>Unterschrift</td></tr>
<tr><td colspan="3">...............................</td><td colspan="2">...............................</td><td>...........</td></tr>
<tr><td>A1 (25 P)</td><td>A2 (25 P)</td><td>A3 (25 P)</td><td>A4 (25 P)</td><td>$\sum$ (100 P)</td><td>Z (11 P)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Bestimmen Sie $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ und den Betrag $|z|$ für die komplexe Zahl $z = \dfrac{1-2i}{3+4i}$.
Ermitteln Sie für $(\overline{z})^{-1}$ und für $\overline{z^{-1}}$ jeweils die Darstellung in kartesischer Form $a+bi$.

   (b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, das durch

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

gegeben ist, im Körper GF(2) mit dem Eliminationsverfahren von Gauss.
Geben Sie die Lösungsmenge als Menge konkreter Vektoren an.

2. (a) Gegeben sind die Untervektorräume U_1, U_2 von $\mathbb{R}^3$:

$$U_1 := \operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right), \quad U_2 := \operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right).$$

Bestimmen Sie für beide Untervektorräume je eine Basis und die Dimension.
Finden Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3, w \neq 0$, der in $U_1 \cap U_2$ liegt.
Ermitteln Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

   (b) Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und u, v, w linear unabhängige Vektoren aus V.
Untersuchen Sie, ob die Vektoren $v - 2u - w$ und $u + v + 3w$ linear abhängig sind.

3. Es sei $M = \{1,2,3,4\} \times \{4,5,6,7\}$.

(a) Geben Sie die Mächtigkeit von M an. Geben Sie ein Element $(a,b) \in M$ an, für welches $a - b \geq 0$ gilt.

(b) Es wird die Relation $R \subseteq M \times M$ betrachtet, die wie folgt definiert ist:

$$(a,b)\,R\,(c,d) \;:\Longleftrightarrow\; b - a = d - c$$

Zeigen Sie, dass R transitiv ist.

(c) Die Relation R aus (b) ist eine Äquivalenzrelation (das müssen Sie nicht zeigen). Geben Sie alle Äquivalenzklassen als Mengen konkreter Elemente an.

(d) Es wird die Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ mit $f((a,b)) = 10a + b$ betrachtet. Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

4. (a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

(b) Es wird der Restklassenring $(\mathbb{Z}_{41}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mod 41 betrachtet.

(i) Bestimmen Sie das Inverse des Elementes 23 in der Gruppe $(\mathbb{Z}_{41}, +)$.

(ii) Bestimmen Sie das Inverse des Elementes 23 in der Gruppe $(\mathbb{Z}_{41} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(iii) Lösen Sie in $(\mathbb{Z}_{41}, +, \cdot)$ die Gleichung $23x + 21 = 0$.

Zusatz 5. (a) Es sei V ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Dimension $n > 0$. Beweisen Sie, dass beliebige Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ aus V linear abhängig sind.

(b) Es sei für $M = \{1,2,3,4\} \times \{4,5,6,7\}$ und beliebiges, festes $\kappa \in \mathbb{N}$ die Funktion

$f_\kappa : M \to \{n \in \mathbb{N} \mid \kappa + 4 \leq n \leq 4\kappa + 7\}$ mit $f_\kappa((a,b)) = \kappa a + b$ gegeben.

Zeigen Sie, dass f für $\kappa = 5$ nicht surjektiv ist.

Finden Sie ein $\kappa \in \mathbb{N}$, für das die Funktion f_κ nicht injektiv ist.

Für welches κ ist f_κ bijektiv? Begründen Sie!