TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Prof. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–1

Erste Modulprüfung am 18.05.2018

<table>
<tr><td colspan="3">Name, Vorname</td><td colspan="3">Matrikelnummer, Studiengang</td><td>Unterschrift</td></tr>
<tr><td colspan="3">.................................</td><td colspan="3">.................................</td><td>...........</td></tr>
<tr><td>A1 (25 P)</td><td>A2 (25 P)</td><td>A3 (25 P)</td><td>A4 (25 P)</td><td>Z (10 P)</td><td>∑ (110 P)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Zeigen Sie, dass $z_0 := 1 - \sqrt{3}\,i$ eine Lösung der Gleichung $z^{12} - 2^{12} = 0$ in $\mathbb{C}$ ist.

   (b) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ stets $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$ gilt. Berechnen Sie für $z = c + i$ Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl

   $$w := \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} \cdot z^{-1}$$

   in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

   (c) Lösen Sie das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   im Körper GF(2), und geben Sie die Lösungsmenge als Spannraum an. Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge?

2. (a) Gegeben ist die parameterabhängige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Spaltenvektoren

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   und dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

   (1) Bestimmen Sie Rang und Kern der Matrix A in Abhängigkeit von a.

   (2) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig? Begründen Sie!

   (3) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind alle linearen Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix A und beliebiger rechter Seite $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar? Begründen Sie!

   (b) Beweisen Sie, dass die Menge

   $$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2a + b + 3c \\ 2b - c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ bildet.

3. (a) Entscheiden Sie, ob der gegebene aussagenlogische Ausdruck erfüllbar ist. Falls ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an. Falls nein, beweisen Sie, dass der Ausdruck unerfüllbar ist.

   (i) $(\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg U) \wedge (U \vee \neg V) \wedge (V \vee \neg W) \wedge (W \vee U)$

   (ii) $(U \vee V \vee W) \wedge (\neg U \vee V) \wedge (\neg V \vee \neg U) \wedge (U \vee \neg V)$

   (b) Es sei die Menge $A = \{0,1,2\}^2 = \Big\{(z_1, z_2) \mid z_k \in \{0,1,2\} \text{ für } k = 1,2\Big\}$ gegeben.

   (i) Berechnen Sie $|\mathcal{P}(A)|$, d.h., die Mächtigkeit der Potenzmenge von A.

   (ii) Ist die Abbildung $f : A \to \mathbb{Z}_6$, die durch $f\big((z_1, z_2)\big) = z_1 + 2z_2$ definiert ist, injektiv? Ist f surjektiv? Ist f bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

4. (a) Berechnen Sie den Wert der eulerschen Phi-Funktion $\phi(18)$. Was gibt dieser Wert an?

   (b) Welche der folgenden vier Zahlen haben ein Inverses bezüglich Multiplikation modulo 18:

$$5, \ 6, \ 16, \ 17$$

   Bestimmen sie das Inverse, falls es existiert, mittels des euklidischen Algorithmus oder beweisen Sie, dass kein Inverses existiert.

   (c) Für welche $a \in \{5, 6, 16, 17\}$ gibt es ein $b \in \mathbb{Z}_{18} \setminus \{0\}$ mit $a \cdot b \equiv 0 \bmod 18$? Falls ein solches b existiert, so zeigen Sie, dass es diese Eigenschaft hat, falls nein, beweisen Sie, dass keines existiert.

Zusatz 5. (a) Begründen Sie, warum die Menge aller Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen Addition und einer Skalarmultiplikation, die durch

$$rv := (0,0,0)^T \quad \text{für } r \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^3$$

   definiert ist, keinen Vektorraum bildet.

   (b) Es seien A, B endliche Mengen und $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to A$ Funktionen. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt:

   - wenn f injektiv und g injektiv ist, dann ist $g \circ f$ injektiv.
   - wenn f injektiv und g surjektiv ist, dann ist $g \circ f$ injektiv.
   - Wenn f surjektiv und g injektiv ist, dann ist $g \circ f$ injektiv.
   - Wenn f surjektiv und g surjektiv ist, dann ist $g \circ f$ injektiv.

   Begründen Sie Ihre Antwort (Beweis oder Gegenbeispiel)!