TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Prof. M. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF - 110

Zweite Modulprüfung am 02.03.2020

Name, Vorname				Matrikelnr. / Studiengang			Unterschrift
....				....			....
A1 (20 P)	A2 (20 P)	A3 (20 P)	A4 (20 P)	A5 (20 P)	$\sum$ (100 P)	Z (10 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.

- Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden und mit dem Namen zu beschriften.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1

(a) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist.

(b) Betrachtet wird die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x & 3x \\ 2x & 4x \end{pmatrix}$.

(1) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.
(2) Bestimmen Sie den Kern von f und dessen Dimension.
(3) Geben Sie die Dimension des Bildes von f an.

2

(a) Gegeben ist die geordnete Basis $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ des $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie das Gram–Schmidt-Verfahren auf $\mathcal{B}$ an, um eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts zu bestimmen. Ermitteln Sie die Norm der berechneten Vektoren.

(b) Betrachtet wird der Vektorraum V der reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt

$$p \bullet q := p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1) + p(2) \cdot q(2).$$

Es seien $p_1(x) := -1 + x,\ p_2(x) := -2x + x^2,\ p_3(x) := 1 - x + x^2$ Elemente von V.

(1) Zeigen Sie, dass p_1 und p_2 zueinander orthogonal sind.
(2) Berechnen Sie die Projektion von p_3 in $\operatorname{Span}(\{p_1, p_2\})$.

3

(a) Berechnen Sie die Anzahl aller $g \in \mathbb{Z}_{28}$, die die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}_{28}; +)$ erzeugen.

(b) Bestimmen Sie die von der Zahl 3 erzeugte Untergruppe $\langle 3 \rangle$ der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}^*_{28}; \cdot)$, und geben Sie die Anzahl der Linksnebenklassen von $\langle 3 \rangle$ in $(\mathbb{Z}^*_{28}; \cdot)$ an.

(c) Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}_{28}$, die die Gleichung $5^{242} + 9x \equiv 26 \pmod{28}$ erfüllen. Verwenden Sie zur Berechnung von 5^{242} die eulersche Phifunktion.

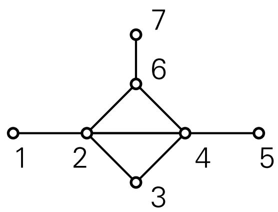
(d) Für eine Untergruppe U von $(\mathbb{Z}^*_{28}; \cdot)$ wird die Relation

$$R := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^*_{28} \times \mathbb{Z}^*_{28} \mid b \in a \cdot U\}$$

betrachtet. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

4

(a) Durch das folgende Diagramm ist ein Graph $G = (V, E)$ gegeben.



(1) Wie viele Kanten besitzt das Komplement von G?

(2) Geben Sie die Knoten- und Kantenmenge des Blockgraphen von G an, und zeichnen Sie ein Diagramm des Blockgraphen.

(3) Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume des Graphen G ohne Verwendung des Satzes von Kirchhoff.

(b) Es sei $K_{n,m}$ der maximale bipartite Graph mit den zwei Partitionsklassen A und B der Größe n bzw. m. Finden Sie alle Paare (n, m), so dass $K_{n,m}$ eulersch ist, d.h. dass $K_{n,m}$ einen geschlossenen Eulerzug enthält.

5

(a) Geben Sie Zeichnungen für k-reguläre, planare Graphen mit Knotenanzahl 6 für $k = 1, 2, 3, 4$ an. Geben Sie zu jeder der Zeichnungen die Anzahl der Flächen an.
(Ein Graph heißt k-regulär, wenn jeder Knoten den Grad k hat.)

(b) Zeigen Sie, dass es keinen k-regulären, planaren Graphen mit $k \geq 6$ gibt.

Z

(a) Es sei V ein euklidischer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\bullet$. Weiter seien $v_1, v_2 \in V$ Eigenvektoren der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zum Eigenwert $k \in \mathbb{K}$. Untersuchen Sie, unter welcher Bedingung $v_2 - \frac{v_2 \bullet v_1}{v_1 \bullet v_1} v_1$ ebenfalls Eigenvektor von A zum Eigenwert k ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kantengraph eines eulerschen Graphen eulersch ist.