TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Prof. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–2

Zweite Modulprüfung am 19.02.2018

Name, Vorname			Matrikelnummer, Studiengang				Unterschrift
....			....				....
A1 (20 P)	A2 (20 P)	A3 (20 P)	A4 (20 P)	A5 (20 P)	Z6 (10 P)	$\sum$ (110 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. Es sei $G = (V, E)$ der gerichtete Graph mit $V := \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und

$$E := \{(a, b), (b, d), (a, c), (c, e), (e, f), (f, c), (f, g), (g, f)\} .$$

   (a) Zeichnen Sie ein Diagramm von G. Ist die Kantenrelation E transitiv, ist sie antisymmetrisch? Begründen Sie Ihre Antworten!

   (b) Es bezeichne $\preceq$ die Erreichbarkeitsrelation auf V und $\sim$ die Äquivalenzrelation auf V, die gegeben ist durch

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; (x \preceq y \text{ und } y \preceq x) .$$

   Geben Sie die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$ als konkrete Mengen an.

   (c) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Faktorordnung $(V, \preceq)/{\sim}$.

2. Es sei $n \in \mathbb{N}, n > 0$. Wir betrachten den Graph $T_n = (V, E)$ mit $V = \{0, \ldots, n-1\}^2$ und $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \in E$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:

$$\begin{aligned} y_1 = y_2 \quad &\text{und} \quad (\, x_1 - x_2 \equiv 1 \,(\bmod n) \text{ oder } x_1 - x_2 \equiv -1 \,(\bmod n)\,) \\ x_1 = x_2 \quad &\text{und} \quad (\, y_1 - y_2 \equiv 1 \,(\bmod n) \text{ oder } y_1 - y_2 \equiv -1 \,(\bmod n)\,) \end{aligned}$$

   (a) Zeichnen Sie jeweils ein Diagramm von T_2 und T_3.

   (b) Geben Sie einen Eulerkreis für den Graph T_3 als Streckenzug an.

   (c) Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}, n > 1$, hat T_n einen Eulerkreis.

3. (a) Geben Sie die Menge der Prüfercodes der Länge 1 über dem Alphabet $\{1,2,3\}$ an, und zeichnen sie für jeden Code den dazugehörigen Baum.

   (b) Berechnen Sie die Anzahl der Spannbäume des Graphen

$$H = (\{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\},\{2,5\}\})\,.$$

   (c) Wie viele Spannbäume hat der K_5?

4. Gegeben ist die vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A in Abhängigkeit von t.

   (b) Begründen Sie, warum A für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ mindestens einen Eigenvektor hat.

   (c) Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Matrix A diagonalisierbar ist.
   (Hinweis: Es ist eine Fallunterscheidung für t nötig.)

5. (a) Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt sind die Vektoren

$$u_1 := (-1,\ 0,\ 0,\ 2)^T \quad \text{und} \quad u_2 := (0,\ 1,\ -2,\ 5)^T$$

   gegeben, und es ist $U := \text{Span}(\{u_1, u_2\})$.

   (1) Bestimmen Sie mit der Methode von Gram-Schmidt einen Vektor u_3, so dass $\{u_1, u_3\}$ eine Orthogonalbasis von U ist.

   (2) Bestimmen Sie den Orthogonalraum $U^\perp$ von U.

   (3) Stellen Sie den Vektor $v := (-1,\ -4,\ 3,\ 2)^T$ als Summe eines Elementes aus U und eines Elementes aus $U^\perp$ dar.

   (b) Es sei V ein beliebiger euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\bullet$ und $||v|| := \sqrt{v \bullet v}$ für jedes $v \in V$.

   Untersuchen Sie, für welche $u, v \in V$ gilt: $||u + v|| = ||u - v||$.

Zusatz 6. (a) Geben Sie einen maximalen planaren Graphen mit 5 Knoten an, und begründen Sie, dass Ihr Graph die geforderten Eigenschaften besitzt.

   (b) Zeigen Sie: Ein maximaler planarer Graph mit mindestens drei Knoten ist zweifach zusammenhängend.