TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Zumbrägel

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–2

Zweite Modulprüfung am 20.02.2017

Name, Vorname			Matrikelnummer, Studiengang			Unterschrift
....			....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	$\sum$ (100 P)	Z (10 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.
- Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.
- Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein Extrablatt, und versehen Sie es mit Ihrem Namen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Berechnen Sie für die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ die Determinante.

   Gibt es eine inverse Matrix zu A?

   (b) In $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   gegeben. Sie können als bekannt voraussetzen, dass A den Eigenwert $\lambda_1 = 4$ hat. Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu λ_1 und die Dimension des zugehörigen Eigenraums.

   Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von der Form

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

   ist, und berechnen Sie alle von $\lambda = 4$ verschiedenen reellen Eigenwerte von A.

   (c) Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u := (u_1, \ldots, u_n)^T$, $v := (v_1, \ldots, v_n)^T$. Zeigen Sie:

   Sind u und v linear abhängig, dann gilt $\det\begin{pmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{pmatrix} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$.

2. (a) Über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_2)^{5\times 3}$ gegeben.

   Bestimmen Sie den Rang von A und den Kern von A. Untersuchen Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{Z}_2^5 : v \mapsto Av$ auf Injektivität und Surjektivität.

   (b) Gegeben sind der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Untervektorraum $U := \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$ von $\mathbb{R}^3$ mit $v_1 := (1, 0, 1)^T$ und $v_2 := (1, 2, 3)^T$.

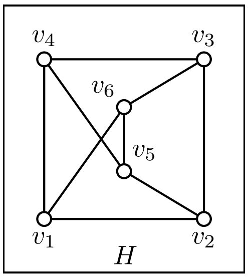
   Prüfen Sie, ob v_1 und v_2 zueinander orthogonal sind.

   Stellen Sie den Vektor $v = (2, 4, 0)^T$ als Summe eines Vektors u aus U und eines Vektors w aus $U^\perp$ dar. Zeigen Sie mit einer geeigneten Probe, dass $w \in U^\perp$ gilt.

3. Die Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ besteht aus allen zu n teilerfremden Elementen von $\mathbb{Z}_n$ zusammen mit der Multiplikation $\bmod n$ als Operation.

   (a) Geben Sie eine Gruppentafel von $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ an. Finden Sie ein Element $m \in \mathbb{Z}_9^*$ der Ordnung 3, d.h. ein Element m mit $|\langle m \rangle| = 3$.

   (b) Es sei $G = (\mathbb{Z}_9^*, E)$ ein Graph mit $E := \{\{a, b\} \in \mathbb{Z}_9^* \times \mathbb{Z}_9^* \mid b - a \not\equiv 0 \pmod 3\}$. Zeichnen Sie ein Diagramm von G.



   (c) Zeigen Sie, dass G isomorph zu dem durch das rechts stehende Diagramm gegebenen Graphen H ist, indem Sie einen Isomorphismus ϕ konkret angeben. Ist H planar? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (d) Geben Sie alle Kantenzüge der Länge 2 von v_1 nach v_5 in H an.

   (e) Geben Sie eine Adjazenzmatrix A von H an (Interpretieren Sie dabei jede ungerichtete Kante $\{v_i, v_j\}$ als ein Paar gerichteter Kanten, von der die eine den Startknoten v_i und Endknoten v_j hat, bei der anderen ist es umgekehrt).

   Bestimmen Sie mit Hilfe von A die Anzahl der Dreiecke in H.

4. Die Menge $T(n)$ der Teiler einer natürlichen Zahl n bildet zusammen mit der Teilbarkeitsrelation $|$ eine geordnete Menge (das müssen Sie nicht zeigen).

   (a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung der Zahl $n = 40$. Wie viele Teiler hat n? Geben Sie ein Teilerdiagramm von n an.

   (b) Wir definieren auf $T(40)$ die binäre Relation

$$L_1 := \{(2^i 5^j, 2^k 5^l) \mid (i < k) \vee (i = k \wedge j \leq l)\}.$$

   Zeigen Sie, dass L_1 antisymmetrisch auf $T(40)$ ist.

   (c) Wir definieren auf $T(40)$ eine weitere binäre Relation

$$L_2 := \{(2^i 5^j, 2^k 5^l) \mid (j < l) \vee (j = l \wedge i \leq k)\}.$$

   Die beiden Relationen L_1 und L_2 sind lineare Ordnungen (das müssen Sie nicht zeigen). Geben Sie L_1 und L_2 jeweils durch ein Ordnungsdiagramm an.

   (d) Begründen Sie, dass $| = L_1 \cap L_2$ gilt. Bestimmen Sie die Ordnungsdimension von $(T(40), |)$.

$\boxed{\text{Zusatz}}$ 5. (a) Es sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, v_2, \ldots, v_k$ seien paarweise orthogonale Vektoren aus V. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linear unabhängig sind.

   (b) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $p > 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie: Wenn das Kongruenzensystem

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{2p} \\ x &\equiv b \pmod{3p} \end{aligned}$$

   eine Lösung hat, dann gilt $a \equiv b \pmod p$. Zeigen Sie weiterhin, dass aus $a \equiv b \pmod p$ folgt, dass $x = 3a - 2b$ eine Lösung des Kongruenzensystems ist.