Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Jun.-Prof. Schneider

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–2

Zweite Modulprüfung am 11.02.2019

Name, Vorname			Matrikelnummer, Studiengang				Unterschrift
....			....				....
A1 (20 P)	A2 (20 P)	A3 (20 P)	A4 (20 P)	A5 (20 P)	Z6 (10 P)	$\sum$ (110 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Durch $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+3y \\ 2x-y \\ -5x+3y \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung gegeben.

   - Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$.
   - Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $A_{\mathcal{BC}}$ bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B} := (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} := (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ von $\mathbb{R}^3$.
   - Ist f injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (b) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \det(A \cdot B^{-1})$ mit

   $$A := \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

   linear ist.

2. Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = (s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

   (a) Untersuchen Sie, welche der Spaltenvektoren s_1, s_2, s_3 und s_4 Eigenvektoren von A sind.

   (b) Berechnen Sie eine Basis des Eigenraumes $\mathrm{Eig}_0(A)$ von A zum Eigenwert $k = 0$.
   Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthogonalbasis von $\mathrm{Eig}_0(A)$ zu berechnen.

   (c) Begründen Sie, dass der Spaltenvektor s_1 nicht in $\mathrm{Eig}_0(A)$ enthalten ist.

   (d) Geben Sie eine Matrix B an, so dass gilt: $B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Für eine natürliche Zahl $n > 1$ werde die Gruppe $G_n := (\mathbb{Z}_n, +)$ betrachtet. Für zwei natürliche Zahlen $m > 1, n > 1$ ist die Abbildung

$$f_{m,n} \colon \mathbb{Z}_{m \cdot n} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, \quad a \mapsto (a \bmod m,\, a \bmod n)$$

ein Homomorphismus von $G_{m \cdot n}$ nach $G_m \times G_n$. (Das muss nicht gezeigt werden.)

(a) Untersuchen Sie, ob die Abbildungen $f_{2,3}$ und $f_{3,3}$ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv sind.

(b) Sind die Gruppen G_9 bzw. $G_3 \times G_3$ zyklisch? Begründen Sie!

(c) Untersuchen Sie, ob die Gruppen G_9 und $G_3 \times G_3$ zueinander isomorph sind.

(d) Betrachtet wird die Untergruppe $U := \big\{(a, b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \mid a = 0\big\}$ von $G_3 \times G_3$. Bestimmen Sie den Index von U in $G_3 \times G_3$, und geben Sie die Linksnebenklassen von U in $G_3 \times G_3$ an.

4. Es werden die natürlichen Zahlen $m := 45$ und $n := 67$ betrachtet.

(a) Berechnen Sie das multiplikative Inverse von m in $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, falls es existiert.

(b) Berechnen Sie $2^{2m} \pmod{n}$.

(c) Zeichnen Sie ein Teilerdiagramm von m, und geben Sie die Ordnungsdimension der geordneten Menge $(T(m), \mid\,)$ an. Kennzeichnen Sie im Teilerdiagramm eine Kette maximaler Länge.

(d) Auf $\mathbb{N}$ ist die Relation R durch

$$R := \{(x, y) \mid x \cdot y \in T(m)\}$$

definiert. Untersuchen Sie, welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv die Relation R besitzt.

5. Für zwei natürliche Zahlen n und k mit $n > 0$ sei $M_{n,k} := \{1, 2, \ldots, 2n + k\}$. Betrachtet wird der Graph $G_{n,k} := (V, E)$ mit

$$V := \big\{A \subseteq M \;\mid\; |A| = n\big\},$$
$$E := \big\{\{A, B\} \;\mid\; A, B \in V, |A \cap B| = n - 1\big\}.$$

(a) Zeichnen Sie für die Graphen $G_{2,0}$ und $G_{1,2}$ jeweils ein Graphendiagramm. Kennzeichnen Sie, falls möglich, jeweils einen Kreis der Länge 3.

(b) Geben Sie die Anzahl der Knoten des Graphen $G_{n,k}$ an.

(c) Begründen Sie, dass der Graph $G_{n,k}$ regulär vom Grad $n(n + k)$ ist, und berechnen Sie die Anzahl der Kanten von $G_{n,k}$.

(d) Untersuchen Sie, ob der Graph $G_{3,2}$ eine Eulertour besitzt.

Zusatz 6. (a) Beweisen Sie, dass der Durchschnitt zweier Ordnungsrelationen auf einer endlichen Menge M wieder eine Ordnungsrelation auf M ist.

(b) Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung des K-Vektorraums V in den K-Vektorraum W. Für zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ gelte $f(v_1) = f(v_2) \neq 0_W$. Beweisen Sie, dass $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist.