TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Prof. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–2

Zweite Modulprüfung am 10.08.2016

Name, Vorname			Matrikelnr., Studiengang (DiplInf, BaInf, MedInf)				Unterschrift
....			....				....
A1 (20 P)	A2 (20 P)	A3 (20 P)	A4 (20 P)	A5 (20 P)	Z6 (11 P)	$\sum$ (111 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.
- Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.
- Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein Extrablatt, und versehen Sie es mit Ihrem Namen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. Gegeben ist die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechnen Sie $A \cdot A^T$ und die Determinante von A.

   (b) Geben Sie die zu A inverse Matrix an.
   (Hinweis: In dieser Teilaufgabe ist weder Herleitung noch Begründung verlangt!)

   (c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A mit ihren algebraischen Vielfachheiten.

   (d) Ermitteln Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus Eigenvektoren der Matrix A besteht.

2. Gegeben sind die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt.

   (a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von v_2 auf den Vektorraum $\mathrm{Span}(\{v_1\})$.

   (b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $U := \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$.

   (c) Stellen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ auf, die $\mathcal{B}$ als Teilmenge enthält.

   (d) Welche Dimension hat der Orthogonalraum $U^\perp$ zu U? Geben Sie eine Basis von $U^\perp$ an.

3. Es ist auf der Menge $A = \{0, 1, 3, 5, 7, 8\}$ folgende Relation gegeben:

$$R = \{(m, n) \in A \times A \mid m \equiv n + 1 \pmod 5\} \ .$$

   (a) Geben Sie R als Menge konkreter Paare an und zeichnen Sie den zu R gehörigen gerichteten Graphen $G = (A, R)$.

   (b) Welche der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, transitiv hat R, welche nicht ? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

   (c) Bestimmen Sie die kleinste Ordnungsrelation T, die R enthält, und zeichnen Sie das Hassediagramm.

4. Sei G der Graph mit Knotenmenge $\{0, 1, \ldots, 5\}$ und den Kanten
   $\{1, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{5, 2\}$, $\{5, 6\}$, $\{3, 6\}$, $\{6, 2\}$. $\{4, 3\}$, $\{1, 3\}$.

   (a) Ist G 2-fach zusammenhängend?

   (b) Besitzt G einen geschlossenen Eulerzug?

   (c) Entscheiden Sie, ob es einen Isomorphismus von G auf sich selbst gibt, der
   (i) den Knoten 4 auf den Knoten 6 (ii) den Knoten 5 auf den Knoten 6
   abbildet.

   Begründen Sie Ihre Antworten!

5. (a) Wie viele beschriftete Bäume mit der Knotenmenge $\{1, \ldots, 7\}$ gibt es?
   Wie viele Kanten hat das Komplement eines jeden solchen Baumes ?

   (b) Wie viele unbeschriftete Bäume (d.h. Isomorphieklassen) haben 7 Knoten und 3 Blätter ?

   (c) Zeichnen Sie ein Diagramm desjenigen Baumes, der die Knotenmenge $\{1, \ldots, 7\}$ und den Prüfercode $(3, 1, 4, 1, 5)$ hat.

Zusatz 6. (a) Zeigen Sie: Ein 4-regulärer Graph mit 6 Knoten ist stets planar.

   (b) Es sei A eine beliebige Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A auch ein Eigenwert von A^T ist.