TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Dr. Zumbrägel

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–2

Zweite Modulprüfung am 09.08.2017

Name, Vorname		Matrikelnummer, Studiengang			Unterschrift
....		....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	$\sum$ (100 P)	Z (11 P)

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.
- Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.
- Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein Extrablatt, und versehen Sie es mit Ihrem Namen.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Berechnen Sie die Determinante der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter k. Für welche $k \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix eine inverse Matrix?

   (b) Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Welche der Vektoren $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$ sind Eigenvektoren von A?
   Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A und alle Eigenwerte von A.

   (c) Es seien $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u := (u_1, \ldots, u_n)^T$, $v := (v_1, \ldots, v_n)^T$. Zeigen Sie:

   Gilt $\det\begin{pmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{pmatrix} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$, dann sind u und v linear abhängig.

2. (a) Bestimmen Sie den Rang der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort!

   Gibt es einen Wert $a \in \mathbb{R}$, für den die Abbildung f bijektiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

   (b) Gegeben sind der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und der Untervektorraum $U := \mathrm{Span}(\{u, v, w\})$ mit $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Prüfen Sie, ob die Vektoren u und v zueinander orthogonal sind.
   Bestimmen Sie einen Vektor aus U, der orthogonal zu u und v ist.

3. (a) Berechnen Sie $5^{301} \pmod{99}$.

(b) Alice und Ben benutzen das RSA-Verfahren zur verschlüsselten Nachrichtenübermittlung. Der öffentliche Schlüssel von Alice lautet $(n, e) = (55, 13)$. Verschlüsseln Sie den Klartext $m = 8$.

Bestimmen Sie den privaten Schlüssel (p, q, d) von Alice.

(c) Es wird die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{26}^*, \cdot)$ des Restklassenringes $(\mathbb{Z}_{26}, +, \cdot)$ betrachtet. Bestimmen Sie die Ordnung r des Elementes 5.

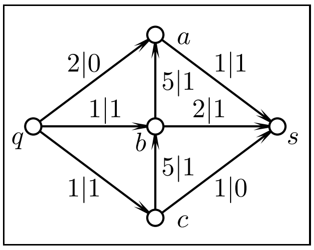
Begründen Sie, dass es kein Element der Ordnung 7 in $(\mathbb{Z}_{26}^*, \cdot)$ gibt.

Geben Sie einen Isomorphismus f zwischen der von 5 erzeugten zyklischen Untergruppe $(\langle 5 \rangle, \cdot)$ und der Gruppe $(\mathbb{Z}_r, +)$ an.

4. (a) Das rechts stehende Transportnetz $T = (V, E, q, s, wt)$ trägt eine Kantenbewertung f.

Begründen Sie, dass f ein Fluss auf T ist.

Bestimmen Sie (ausgehend von f) den maximalen Fluss von T mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus und die Stärke dieses maximalen Flusses.



(b) Bestimmen Sie mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus einen minimalen Schnitt in T.

(c) Dem obigen Diagramm des Transportnetzes T liegt ein gerichteter Graph (V, E) zugrunde.

Geben Sie die Adjazenzmatrix A des Graphen (V, E) für die Knotenreihenfolge q, a, b, c, s an. Verwenden Sie A, um die Anzahl aller Kantenzüge der Länge 2 von q nach s zu berechnen.

(d) Zeigen Sie nur durch Rechnung mit der Adjazenzmatrix A, dass jeder Kantenzug des Graphen (V, E) von q nach s eine Länge von höchstens 4 hat.

$\boxed{\text{Zusatz}}$ 5. (a) Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K, $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung und $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V. Zeigen Sie, dass $\{f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_n)\}$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus W ist.

(b) Es sei G ein zusammenhängender endlicher planarer Graph, der keine Dreiecke enthält. Zeigen Sie, dass G einen Knoten v vom Grad $\deg(v) < 4$ enthalten muss.