TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Baumann, Prof. Bodirsky

Einführung in die Mathematik für Informatiker INF–110–2

Zweite Modulprüfung am 15.08.2018

Name, Vorname			Matrikelnummer, Studiengang				Unterschrift
....			....				....
A1 (20 P)	A2 (20 P)	A3 (20 P)	A4 (20 P)	A5 (20 P)	Z6 (10 P)	$\sum$ (110 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- *Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.*
- *Die Benutzung elektronischer Geräte ist nicht gestattet.*
- *Es ist dokumentenechtes Schreibgerät, kein Bleistift, zu benutzen.*
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden. Beschriften Sie jedes Blatt mit der jeweiligen Aufgabennummer und versehen Sie es mit Ihrem Namen.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1. (a) Es ist die Adjazenzmatriz eines Graphen G mit Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie ein Diagramm von G, und geben Sie alle unbeschrifteten Spannbäume von G, d.h. solche, die nicht zueinander isomorph sind, durch jeweils ein Diagramm an. (Nummerieren Sie dabei die Baum-Diagramme durch.)

(b) Ermitteln Sie, wie viele Flächen ein ebener (d.h. planarer) Graph $G = (V, E)$ haben kann, wenn $|V| = 10$ ist und alle Knoten den Grad 3 haben.

(c) Ist der Graph $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E)$ mit

$$E := \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\big\}$$

planar? Gibt es ein beschränktes 3-dimensionales Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass G isomorph zum Kantengraph von P ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Es sei M die Menge der Wörter über dem Alphabet $\{0, 1\}$ der Länge höchstens zwei. Auf M werden folgende partielle Ordnungen betrachtet:

Präfixordnung	$\preceq_1$:	$u \preceq_1 v$, falls $\lvert u\rvert \leq \lvert v\rvert$ und $u(i) = v(i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, \lvert u\rvert\}$.
Teilwortordnung	$\preceq_2$:	$u \preceq_2 v$, falls u aus w durch Wegstreichen von Buchstaben (an beliebigen Stellen in w) entsteht. Dabei darf auch nichts weggestrichen werden.

(a) Geben Sie beide Ordnungen als konkrete Mengen an.

(b) Zeigen Sie, dass die Präfixordnung auf M alle Eigenschaften einer partiellen Ordnung besitzt.

(c) Zeichnen Sie für beide Ordnungen das Hasse-Diagramm.

(d) Geben Sie für beide Ordnungen eine längste Antikette an.

3. Ein *Ternärbaum* sei rekursiv definiert wie folgt:

   - $\emptyset$ ist ein Ternärbaum.
   - Wenn T_1, T_2 und T_3 Ternärbäume sind, dann ist auch (T_1, T_2, T_3) ein Ternärbaum.

   Es bezeichne $t(n)$ die Anzahl der Ternärbäume, die mit genau n Klammerpaaren gebildet wurden. (Es ist $t(1) = 1$, denn offensichtlich ist $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ der einzige Ternärbaum mit genau einem Klammerpaar ( ) .)

   (a) Geben Sie alle Ternärbäume an, die mit genau zwei Klammerpaaren gebildet wurden.
   (b) Berechnen Sie $t(3)$.
   (c) Geben Sie eine rekursive Formel für $t(n)$ an.

4. Gegeben ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = (4, 0, 1)^T$ ein Eigenvektor der Matrix A ist.
   (b) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.
   (c) Berechnen Sie die zu A inverse Matrix.
   (d) Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie die Matrix D explizit an.
   (e) Untersuchen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto A \cdot v$ injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

5. (a) Gegeben sind Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$.

   Ermitteln Sie alle Paare (a, b), für die $\{v_1, v_2\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standard-Skalarprodukts ist.

   (b) Betrachtet wird der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt und der Unterraum

   $$U := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}.$$

   (1) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von U.
   (2) Bestimmen Sie $U^\perp$ als Spannraum einer Basis.
   (3) Bestimmen Sie für den Vektor $v = (1,\ 0,\ 0)^T$ seine Projektion $\hat{v}$ in U und einen Vektor $w \in U^\perp$ mit $v = \hat{v} + w$.

Zusatz 6. (a) Wie viele Knoten hat ein Graph mit 15 Kanten, dessen Komplement ein Baum ist?

   (b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt orthogonal, wenn $A^T = A^{-1}$ gilt. Beweisen Sie, dass für die Matrix $B := A - E_n$ gilt:

   $$A \text{ orthogonal} \iff B + B^T + B \cdot B^T = 0_{R^{n\times n}}$$