TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. A. Noack

Mathematische Methoden für Informatiker INF - 120

Erste Modulprüfung am 25. Februar 2020

Name, Vorname			Matrikelnr. / Studiengang			Unterschrift
....			....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	$\sum$ (100 P)	Z (10 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- **Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.**
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden und mit dem Namen zu beschriften.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1

(a) Verwenden Sie geeignete Rechenregeln, um für die folgenden Zahlenfolgen (x_n) den Grenzwert zu berechnen:
(Es muss dabei klar ersichtlich sein, welche Regeln in welchem Schritt angewendet werden.)

$$(1) \quad x_n := \ln\left(\left(1-\frac{2}{5n}\right)^n\right) \qquad\qquad (2) \quad x_n := \sqrt[n]{3n} + \frac{2^{n-1}}{3^n}\,.$$

(b) Betrachtet wird die rekursiv definierte Zahlenfolge (x_n) mit

$$x_{n+1} := -x_n^2 + 2x_n, \quad x_0 := \tfrac{1}{2}.$$

Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass $0 < x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(1) Zeigen Sie, dass (x_n) streng monoton wächst.

(2) Begründen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert, und berechnen Sie diesen Grenzwert.

2

(a) Begründen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3-1}{10k^3+k^2+100}$ divergent ist.

(b) Gegeben ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \ln\left(3-\frac{2k+1}{k+5}\right)$.

- Zeigen Sie, dass $\ln\left(3-\frac{2k+1}{k+5}\right) > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
- Verwenden Sie das Leibnizkriterium, um die Reihe auf Konvergenz zu untersuchen.

3

(a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x^3+1)}{x^5+1}$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{ae^{x+1} - b}{x-2} & \text{für } x < -1, \\ \sqrt{x^2+3} & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

mit reellen Parametern a und b.

(1) Angenommen, f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Welche Bedingung müssen a und b erfüllen?

(2) Es gelte die unter (1) ermittelte Bedingung für a und b. Begründen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(3) Bestimmen Sie a und b so, dass f an der Stelle $x_0 = -1$ differenzierbar ist.

4

Gegeben ist die reellwertige Funktion f durch $f(x,y) := \dfrac{x}{y} \cdot \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ für $x, y > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Menge aller Paare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für die $f_x(x,y) = 0$ ist, und skizzieren Sie diese Menge in der xy-Ebene.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,2)$.

(c) Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene für die Funktion f an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,2)$ an.

Z

Ermitteln Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = 1 - \ln(1+2x)$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Untersuchen Sie, ob die Reihe an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$ konvergent ist.