TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Bereich Mathematik und Naturwissenschaften Fakultät Mathematik, Institut für Algebra

Prof. U. Baumann, Dr. A. Noack

Mathematische Methoden für Informatiker INF - 120 - 2

Modulprüfung am 06.03.2020

Name, Vorname			Matrikelnr. / Studiengang			Unterschrift
....			....			....
A1 (25 P)	A2 (25 P)	A3 (25 P)	A4 (25 P)	$\sum$ (100 P)	Z (10 P)	

Beachten Sie bitte folgende Hinweise:

- **Der Rechenweg ist lückenlos anzugeben, Antworten sind zu begründen.**
- **Für jede Aufgabe ist ein Extrablatt zu verwenden und mit dem Namen zu beschriften.**

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

1

(a) Zeigen Sie, dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 95 zyklisch ist.

(b) Es sei p eine Primzahl. Wie viele Isomorphieklassen gibt es für abelsche Gruppen der Ordnung p^5 ? Geben Sie diese Isomorphieklassen in der Form

$$Z_{m_1} \times Z_{m_2} \times \ldots \times Z_{m_k} \text{ mit } m_1 | m_2, m_2 | m_3, \ldots, m_{k-1} | m_k$$

an.

(c) Sei $(G, \circ)$ mit $G := \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 120 und H eine Untergruppe der Ordnung 20 von $(G, \circ)$. Geben Sie ein erzeugendes Element der Gruppe H an, und ermitteln Sie alle Exponenten $k \in \{1, 2, \ldots, 120\}$ mit $H = \langle g^k \rangle$.

(d) Gegeben sind die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ und deren Untergruppe $U := \{24z \mid z \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Begründen Sie, dass U ein Normalteiler in $(\mathbb{Z}, +)$ ist.

(2) Welche Gruppenordnung hat die Faktorgruppe $(\mathbb{Z}/U, \oplus)$ mit $\mathbb{Z}/U = \{z + U \mid z \in \mathbb{Z}\}$?

(3) Berechnen Sie $(15 + U) \oplus (-72 + U)$ in der Faktorgruppe $(\mathbb{Z}/U, \oplus)$.

(4) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/U, \oplus)$ kein Element der Ordnung 10 enthält.

2

(a) Zerlegen Sie das Polynom $f(x) = x^3 + 1 \in \mathrm{GF}(2)[x]$ in irreduzible Faktoren über $\mathrm{GF}(2)$.

(b) Wie viele Elemente enthält der Ring $(R, \oplus, \otimes)$ mit $R := \mathrm{GF}(2)[x]/x^3 + 1$? Geben Sie alle Elemente von R an.

(c) Bestimmen Sie die Einheiten des Ringes $(R, \oplus, \otimes)$ aus (b) und finden Sie zu jeder Einheit das multiplikative Inverse in R.

(d) Bestimmen Sie alle Elemente g des Ringes $(R, \oplus, \otimes)$ aus (b) mit $g \otimes g = g^2 = g$.

(e) Finden Sie zwei Nullteiler im Ring $(R, \oplus, \otimes)$ aus (b).

3

(a) Ermitteln Sie für das Integral $\displaystyle\int \frac{3x^5+2}{x^4-x^3}\,\mathrm{d}x$ den Ansatz für die Partialbruchzerlegung.

(b) Finden Sie alle Parameterwerte $c \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $y(x) = c\,x\ln(x)$ eine Lösung folgender Differentialgleichung ist:

$$y'' - xy' + y = \frac{1-x^2}{2x}.$$

(c) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 + y_3 \\ y_3' &= -y_1 + 3y_3\ . \end{aligned}$$

Für die Koeffizientenmatrix A dieses Systems darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass $(1,-1,1)^T$ ein Eigenvektor von A ist und dass A den doppelten Eigenwert 4 besitzt.

Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

4

(a) Es sei $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld über Ω mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß p, und A und B seien Ereignisse mit $p(A), p(B) > 0$ und $p(A|B) = \frac{1}{3}$. Die Ereignisse $\bar{A}$ und B seien unabhängig. Bestimmen Sie $p(\bar{A})$.

(b) Bei einer Quizfrage werden den Kandidaten vier Antwortmöglichkeiten vorgeschlagen, von denen genau eine richtig ist. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K die richtige Antwort weiß. Sei q die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K die richtige Antwort gibt, wenn K die richtige Antwort weiß. Sei r die Wahrscheinlichkeit, dass K die richtige Antwort gibt, wenn K sie nicht weiß.
Angenommen, Kandidat K hat die Quizfrage richtig beantwortet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass K die richtige Antwort tatsächlich wusste?

Hinweis: Führen Sie für alle Ereignisse, mit denen Sie arbeiten, eine Kurzbezeichung ein, und geben Sie Formeln für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten an!

(c) Beobachtet wird ein Punkt auf der Zahlengeraden, der von seiner aktuellen Position aus um eine Einheit nach rechts oder um eine Einheit nach links springen kann. Nach rechts springt er stets mit Wahrscheinlichkeit p (nach links mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$).

Zunächst befindet sich der Punkt im Koordinatenursprung. Die Zufallsgröße $\mathcal{X}_n$ gibt seine Position nach n Sprüngen an, die Zufallsgröße $\mathcal{Y}_n$ gibt die Anzahl der Sprünge nach rechts innerhalb der n Sprünge an.

(1) Begründen Sie, dass $\mathcal{Y}_n$ eine binomialverteilte Zufallsgröße ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\mathcal{Y}_n$ in Abhängigkeit von n und p an.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}_n = 2 \cdot \mathcal{Y}_n - n$ gilt.

(3) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(\mathcal{X}_n)$ und die Varianz $D^2(\mathcal{X}_n)$ in Abhängigkeit von n und p.

Z

Geben Sie einen injektiven Homomorphismus h an, der die Gruppe $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ in die symmetrische Gruppe $(S_7, \circ)$ abbildet. Ermitteln Sie für jedes Element von $\mathbb{Z}_{10}$ das Bild unter h.

Zeigen Sie, dass es keinen injektiven Homomorphismus von $(\mathbb{Z}_8, +)$ in $(S_7, \circ)$ gibt.