Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

1. Lösungsblatt für die Woche 21.10. - 27.10.2019

Mengenlehre & Binomialkoeffizienten

Ü2 (a) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen A, B einer festen Menge M gilt:

- $A \cap \overline{B} = A \setminus B$,
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) Überprüfen Sie für jede der folgenden Gleichungen, ob sie für beliebige Teilmengen A, B und C einer Menge M richtig oder falsch sind. Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
(2) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$,
(3) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Hinweis: Es dürfen nur die in der Vorlesung aufgelisteten Rechenregeln für Mengenoperationen als bekannt vorausgesetzt werden.

Lösung:

(a) Wir verwenden das *Extensionalitätsprinzip*; also das zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

Beweis der ersten Gleichung. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap \overline{B} &\Leftrightarrow x \in A \text{ und } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ und } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B. \end{aligned}$$

Und analog läuft der Beweis für die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ oder } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ oder } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B}). \end{aligned}$$

(1) Mit der Regel $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ und Assoziativität:
$A \cap (B \setminus C) = A \cap (B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) \setminus C$.
oder alternativ:
$x \in A \cap (B \setminus C) \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \in B \setminus C \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \in B$ und $x \notin C$.
$x \in (A \cap B) \setminus C \;\Leftrightarrow\; x \in A \cap B$ und $x \notin C \;\Leftrightarrow\; x \in A$ und $x \in B$ und $x \notin C$.
Also sind die Mengen gleich.

(2) $(A \cup B) \setminus B \neq (A \setminus B) \cup B$, denn die linke Menge ist für $B \neq \emptyset$ eine echte Teilmenge der rechten (Venn-Diagramm zur Veranschaulichung, nicht zum Beweis, sinnvoll):

$(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} = A \cap \overline{B} = A \setminus B$

$\subseteq (A \setminus B) \cup B = A \cup B$. Also sind die Mengen ungleich, wenn $B \neq \emptyset$.

oder Gegenbeispiel:

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{3\} \Rightarrow (A \cup B) \setminus B = \{1, 2\}$ und $(A \setminus B) \cup B = A = \{1, 2, 3\}$.

(3) Mit de-Morgan-Gesetzen, $\overline{\overline{B}} = B$ und Distributivität:

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap (\overline{A} \cup B) = \underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap B) = A \cap B$.

Ü3 (c) In einer Gruppe von 17 Leuten seien zwei Personen ausgewählt und mit den Spitznamen A und B bezeichnet. Auf wie viele Arten kann man aus dieser Gruppe 12 Leute so auswählen, dass die folgende Regel (R1) bzw. (R2) erfüllt wird:

(R1) falls man A wählt, muss man auch B wählen,

(R2) falls man A wählt, darf man B nicht wählen ?

Lösung:

(c) (i) Betrachten die zwei Mengen

A_1 : Menge aller Teilmengen mit 12 Elementen aus den 17 Personen, so dass A enthalten ist $\Rightarrow$ B auch

A_2 : Menge aller Teilmengen mit 12 Elementen aus den 17 Personen, so dass A nicht enthalten ist (B kann dabei sein, muss aber nicht).

Dann ist $\binom{|A_1|=15}{10}$, da außer A und B noch 15 Personen übrig sind und von den 12 Personen bereits 2 gewählt sind, also noch 10 Plätze frei sind. (Anzahl Teilmengen mit 12 Elementen aus Menge mit 15 Elementen.)

Es gilt analog $\binom{|A_2|=16}{12}$, da A nicht infrage kommt, also nur aus 17-1 = 16 gewählt wird.

Insgesamt also (da beide Mengen disjunkt sind und zusammen die gesamte Menge ergeben): $|A_1| + |A_2| = \binom{15}{10} + \binom{16}{12}$.

(ii) Betrachten die zwei Mengen

A_1 : Menge aller Teilmengen mit 12 Elementen aus den 17 Personen, so dass A enthalten ist $\Rightarrow$ B ist nicht enthalten

A_2 : Menge aller Teilmengen mit 12 Elementen aus den 17 Personen, so dass A nicht enthalten ist (B kann dabei sein, muss aber nicht).

Dann ist $\binom{|A_1|=15}{11}$, da außer A noch 15 Personen übrig sind (B darf nicht) und von den 12 Personen bereits eine gewählt ist.

Es gilt wie in (a) $\binom{|A_2|=16}{12}$.

Insgesamt also (da beide Mengen disjunkt sind und zusammen die gesamte Menge ergeben): $|A_1| + |A_2| = \binom{15}{11} + \binom{16}{12}$.

H5 (a) Untersuchen Sie, ob die Differenz $\setminus$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. ob für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

(b) Zeigen Sie, dass die *symmetrische Differenz* $A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$

Lösung:

(a) Ein Tripel aus Mengen, das die Gleichung nicht erfüllt, ist $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2\}$. (Gegenbeispiel)

(b) Die symmetrische Differenz ist assoziativ, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) &= A \,\Delta\, \big((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\big) \\
&= \Big(A \cap \overline{(B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)}\Big) \cup \Big(\overline{A} \cap \big((B \cap \overline{C}) \cup (\overline{B} \cap C)\big)\Big) \\
&= \Big(A \cap (\overline{B} \cup C) \cap (B \cup \overline{C})\Big) \cup \Big((\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)\Big) \\
&= \Big(A \cap \Big(\overline{B} \cap (B \cup \overline{C})) \cup \big(C \cap (B \cup \overline{C})\big)\Big)\Big) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\
&= \Big(A \cap \big((\overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap C)\big)\Big) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C); \\
(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C &= \big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big) \,\Delta\, C \\
&= \Big(\big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big) \cap \overline{C}\Big) \cup \Big(\overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)} \cap C\Big) \\
&= \Big((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C})\Big) \cup \Big((\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap C\Big) \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup \Big(\Big((\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})) \cup \big(B \cap (A \cup \overline{B})\big)\Big) \cap C\Big) \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup \Big(\big((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\big) \cap C\Big) \\
&= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

Da beide Ausdrücke gleich sind, ist die symmetrische Differenz assoziativ.

H6 (a) Es sei $A = \{a, b\}$, $B = \mathcal{P}(A)$ und $C = \mathcal{P}(B)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $\{a\} \in A$, (ii) $\{a\} \in B$, (iii) $\{a\} \in C$, (iv) $\big\{\{a\}\big\} \subseteq B$,
(v) $\big\{\{a\}\big\} \in C$, (vi) $\{\emptyset\} \subseteq A$, (vii) $\{\emptyset\} \subseteq B$, (viii) $\{\emptyset\} \subseteq C$.

(b) Beweisen Sie, dass die folgenden Beziehungen

(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$,

(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

für beliebige Teilmengen A, B einer festen Menge M gelten. Gilt sogar Gleichheit? Begründen Sie!

Lösung:

(a) Es gilt $A = \{a, b\}$, sowie $B = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$, und

$$\begin{aligned}
C = \Big\{&\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\{a\}\big\}, \big\{\{b\}\big\}, \big\{\{a, b\}\big\}, \big\{\emptyset, \{a\}\big\}, \big\{\emptyset, \{b\}\big\}, \big\{\emptyset, \{a, b\}\big\}, \\
&\big\{\{a\}, \{b\}\big\}, \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}, \big\{\{b\}, \{a, b\}\big\}, \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\big\}, \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\big\}, \\
&\big\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\big\}, \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}, \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}\Big\}
\end{aligned}$$

Dementsprechend sind die folgenden Aussagen wahr: (ii), (iv), (v), (vii), (viii), die restlichen sind falsch.

(b) Es gilt im ersten Fall:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \quad & \Leftrightarrow \quad (X \subseteq A) \wedge (X \subseteq B) \\ & \Leftrightarrow \quad X \subseteq A \cap B \\ & \Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Im zweiten Fall gilt

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \quad & \Leftrightarrow \quad (X \subseteq A) \vee (X \subseteq B) \\ & \Longrightarrow \quad X \subseteq A \cup B \\ & \Leftrightarrow \quad X \in \mathcal{P}(A \cup B). \end{aligned}$$

Ein Gegenbeispiel für die Umkehrung der mittleren Implikation ist bspw. $A = \{1\}$ und $B = \{2\}$, sowie $X = \{1, 2\}$.