TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

1. Übungsblatt für die Woche 21.10. - 27.10.2019

Mengenlehre & Binomialkoeffizienten

Hinweis: Hausaufgaben, die zur Abgabe bestimmt sind, sind mit einem $\boxed{\textbf{A}}$ gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.

Ü1 (a) Es werden Mengen $A := \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$ und $B := \{-2, -1\} \cup (1, 3]$ als Teilmengen der reellen Zahlen betrachtet. Geben Sie die folgenden Mengen in üblicher Mengenschreibweise an:

(i) $A \cup B$, (ii) $A \setminus B$, (iii) $A \times B$.

Skizzieren Sie $A \times B$ in der euklidischen Ebene.

(b) Beweisen Sie anhand der Definition des geordneten Paars (s. Vorlesung), dass aus $(a, b) = (c, d)$ stets $a = c$ und $b = d$ folgt. Geben Sie ein Beispiel für Mengen a, b, c, d an, für die $\{a, \{b\}\} = \{c, \{d\}\}$ gilt, aber nicht $a = c$ und $b = d$.

(c) Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ wird die Menge $A_m := \{n \in \mathbb{N} \mid m < n \leq 4m\}$ betrachtet. Geben Sie die Mengen A_0, A_1 und A_2, sowie die Potenzmengen $\mathcal{P}(A_0)$ und $\mathcal{P}(A_1)$ als Mengen konkreter Elemente an.

Beweisen Sie: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $|\mathcal{P}(A_m)| = 8^m$.

Ü2 (a) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen A, B einer festen Menge M gilt:

- $A \cap \overline{B} = A \setminus B$,
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) Überprüfen Sie für jede der folgenden Gleichungen, ob sie für beliebige Teilmengen A, B und C einer Menge M richtig oder falsch sind. Geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
(2) $(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) \cup B$,
(3) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Hinweis: Es dürfen nur die in der Vorlesung aufgelisteten Rechenregeln für Mengenoperationen als bekannt vorausgesetzt werden.

Ü3 (a) Wo befinden sich die sogenannten *Dreieckszahlen* $\frac{(n+1)n}{2}$ im Pascalschen Dreieck?

(b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, für die $\binom{n}{2} < \binom{n}{3}$ gilt.

(c) In einer Gruppe von 17 Leuten seien zwei Personen ausgewählt und mit den Spitznamen A und B bezeichnet. Auf wie viele Arten kann man aus dieser Gruppe 12 Leute so auswählen, dass die folgende Regel (R1) bzw. (R2) erfüllt wird:

(R1) falls man A wählt, muss man auch B wählen,
(R2) falls man A wählt, darf man B nicht wählen ?

H4 $\boxed{\mathbf{A}}$

(a) Bestimmen Sie die Menge A aller Zahlen $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$, für die $\binom{n}{6} < \binom{n}{5}$ gilt.

(b) Es werden die Mengen $M := \{0, 1, \ldots, 9\}$ und

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{A \subseteq M \mid |A| = 5 \text{ und } 0 \in A\} \text{ und} \\ M_2 &:= \{A \subseteq M \mid |A| = 5 \text{ und } 0 \notin A\} \end{aligned}$$

betrachtet. Bestimmen Sie die Mächtigkeiten $|M_1|$ und $|M_2|$.

H5 (a) Untersuchen Sie, ob die Differenz $\setminus$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. ob für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

(b) Zeigen Sie, dass die *symmetrische Differenz* $A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eine assoziative Mengenoperation ist, d.h. für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C.$$

H6 (a) Es sei $A = \{a, b\}$, $B = \mathcal{P}(A)$ und $C = \mathcal{P}(B)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $\{a\} \in A$, (ii) $\{a\} \in B$, (iii) $\{a\} \in C$, (iv) $\big\{\{a\}\big\} \subseteq B$,
(v) $\big\{\{a\}\big\} \in C$, (vi) $\{\emptyset\} \subseteq A$, (vii) $\{\emptyset\} \subseteq B$, (viii) $\{\emptyset\} \subseteq C$.

(b) Beweisen Sie, dass die folgenden Beziehungen

(i) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$,
(ii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

für beliebige Teilmengen A, B einer festen Menge M gelten. Gilt sogar Gleichheit? Begründen Sie!