TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

2. Übungsblatt

für die Woche 28.10. - 03.11.2019

Abbildungen

Hinweis: Hausaufgaben, die zur Abgabe bestimmt sind, sind mit einem $\boxed{\textbf{A}}$ **gekennzeichnet. Weitere Hausaufgaben dienen Ihnen zum selbstständigen Nacharbeiten des Stoffes.**

Ü7 Es sei $f\colon S \to M$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ für beliebige $A, B \subseteq S$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann gilt $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$ für alle $A, B \subseteq S$.

(Es gilt sogar: f ist injektiv $\Leftrightarrow \forall\, A, B \subseteq S:\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Die Rückrichtung dieses Beweises bleibt für Sie zum Selbsstudium.)

Ü8 (a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen f darauf, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung f^{-1}, falls sie existiert:

(1) $f\colon \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{-1,0,1\}$ mit $f\big((x_1, x_2)\big) := x_1 - x_2$,

(2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := -1 + i(z-1)$,

(3) die Abbildung $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$, die jeder nichtleeren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ das kleinste Element in A zuordnet.

(b) Es seien A, B, C beliebige, nichtleere Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie:

- Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.
- Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.

Ü9 (a) Betrachtet werden folgende Permutationen der Menge $X := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \beta := (5\ 6) \circ (3\ 5\ 6\ 9) \circ (5\ 6)\ .$$

- Geben Sie α und β und ihre Umkehrabbildung in Zyklenschreibweise an.
- Bestimmen Sie $\alpha \circ \beta$, $\alpha^2 := \alpha \circ \alpha$, $\alpha^3 := \alpha \circ \alpha^2$ und α^4 in Zyklenschreibweise.
- Wie kann man α^{2019} effizient berechnen?
- Stellen Sie die Permutation β als Produkt von Transpositionen dar.

(b) Beschreiben Sie die Bewegungen der Ebene, die ein gleichseitiges Dreieck auf sich abbilden, durch Permutationen der Eckpunkte in Zyklenschreibweise.

H10 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}, \quad (m,n)\mapsto m+n$$

injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Ergebnisse durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!

(b) Auf der Menge $X := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ sind folgende zwei Permutationen gegeben:

$$\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \beta := (1\ 5\ 4)\circ(1\ 2\ 7\ 8\ 5)\circ(2\ 3\ 10)\ .$$

Geben Sie α, β, $\alpha\circ\beta$, $\beta\circ\alpha$ und α^4 in Zyklenschreibweise an.

H11 (a) Es seien A,B,C nichtleere Mengen und $f : A\to B$, $g : B\to C$ zwei beliebige Abbildungen. Untersuchen Sie, ob die Komposition eine kommutative Operation ist, d.h. ob gilt $g\circ f = f\circ g$. (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(b) Für Mengen A,B mit $|A|>1, B\neq\emptyset$ wird die Abbildung

$$F : A\times B^A \to B \text{ mit } F(a,f) := f(a)$$

betrachtet. Welche Mächtigkeit hat der Definitionsbereich von F (bzgl. der Mächtigkeit von A und B)? Ist F injektiv? Ist F surjektiv?

H12 Gegeben sind die Mengen $A := \{a,b\}$ und $B := \{c,d,e,f\}$. Bestimmen Sie:

(a) die Anzahl aller injektiven Abbildungen in B^A und in A^B.

(b) die Anzahl aller surjektiven Abbildungen in B^A und in A^B.

Geben Sie jeweils, wenn möglich, ein Beispiel einer solchen Abbildung an.