TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

3. Übungsblatt

für die Woche 04.11. - 10.11.2019

Aussagenlogik, Boolsche Funktionen

Ü13 (a) Verwenden Sie eine Wertetabelle, um die Distributivität der Disjunktion $\vee$ über der Konjunktion $\wedge$ zu beweisen.

(b) Ein Gerät kann je nach Kombination der Baugruppen A, B, C, D in verschiedenen Varianten hergestellt werden. Dabei sind jedoch folgende Bedingungen sämtlich einzuhalten:

- Die Baugruppen A und D können, wenn überhaupt, nur gemeinsam auftreten.
- Der Einbau von D macht den Einbau von C erforderlich.
- Eine Variante, die A nicht enthält, muss B enthalten.
- B und D schließen sich gegenseitig aus.

(i) Stellen Sie jede der vier Bedingungen als aussagenlogischen Ausdruck dar.

(ii) Ermitteln Sie alle möglichen Bauvarianten.

Ü14 (a) Zeigen Sie durch geeignete Umformungen, dass das *Prinzip der Kontraposition* gilt, d.h., für alle aussagenlogischen Ausdrücke A, B gilt:

$$(A \Rightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

(Die in der Vorlesung behandelten Grundgesetze aussagenlogischer Verknüpfungen dürfen verwendet werden.)

(b) Zeigen Sie, dass der Ausdruck $\Big((A \Rightarrow B) \wedge A\Big) \Rightarrow B$ eine Tautologie ist.

Ü15 (a) Der folgende Ausdruck ist in konjunktiver Normalform (KNF) gegeben:

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ .$$

Handelt es sich um eine Horn-Formel?

(b) Verwenden Sie die Methode der positiven 1-Resolution, um zu entscheiden, ob die folgenden aussagenlogischen Ausdrücke erfüllbar sind. Falls ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an.

(1) $(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_1$,

(2) $(\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_2) \wedge x_4 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$,

(3) $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge y \wedge (y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg z)$.

(c) Durch untenstehende Wertetabelle ist eine boolsche Funktion $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ gegeben.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Bestimmen Sie die Darstellung der Funktion in disjunktiver Normalform (DNF).

H16 $\boxed{\textbf{A}}$ Zeigen Sie, dass für alle aussagenlogischen Ausdrücke A, B, C die Ausdrücke

$$(\neg A \vee B) \wedge \big(B \Rightarrow (\neg C \wedge \neg A)\big) \quad \text{und} \quad \neg A \wedge \neg(B \wedge C)$$

äquivalent sind. Beweisen Sie dies auf zwei Wegen:

1.Weg: Aufstellen einer detaillierten Wertetabelle, d.h. Teilausdrücke sind mit auszuwerten,

2.Weg: Umformung des einen Ausdrucks anhand der in der Vorlesung behandelten Grundgesetze aussagenlogischer Verknüpfungen, um den anderen Ausdruck zu erhalten. Geben Sie dabei an, welches Gesetz Sie in welchem Schritt anwenden.

H17 Es seien A und B aussagenlogische Ausdrücke über derselben Variablenmenge. Ordnen Sie die folgenden Ausdrücke in einer solchen Reihenfolge an, dass jeder Ausdruck, die rechts von ihm folgenden impliziert.

(i) $\neg A \Leftrightarrow B$ (ii) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ (iii) $\neg(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$

(iv) $A \vee B$ (v) $\neg A \wedge B$.

H18 (a) Gegeben ist die boolsche Funktionen $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ durch die Wertetabelle

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Bestimmen Sie eine Darstellung von $f(x_1, x_2, x_3)$ in DNF. Versuchen Sie auch, eine Darstellung in KNF zu finden.

(b) Verwenden Sie die Methode der positiven 1-Resolution, um zu entscheiden, ob der aussagenlogische Ausdruck

$$(x \vee \neg z \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge z \wedge (\neg y \vee z \vee \neg x)$$

erfüllbar ist. Falls ja, so geben Sie eine erfüllende Belegung an. Falls nein, begründen Sie, warum der Ausdruck nicht erfüllbar ist.