Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

4. Übungsblatt

für die Woche 11.11. - 17.11.2019

Natürliche Zahlen, Primzahlen, Induktion

Ü19 (a) Finden Sie eine Primzahlzerlegung für jede der Zahlen $60, 432$ und 3465.

(b) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, deren drei Ziffern untereinander und von 0 verschieden sind, und bei denen das Produkt ihrer Ziffern durch 81 teilbar ist?

(c) Welche Mächtigkeit hat die Menge $A = \{t \in \mathbb{N} \mid t \text{ teilt } 360\}$?

Finden Sie eine allgemeine Formel für die Anzahl Teiler einer natürlichen Zahl n.

Ü20 Beweisen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ für jedes $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$, fest,

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ü21 Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

(a) Für jede endliche Menge M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

(b) Für die in der Vorlesung rekursiv definierte Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ gilt die Eigenschaft der Distributivität:

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}: \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\ .$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gibt es eine Primzahl, die n teilt.

H22 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Beweisen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt: $\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = \frac{1}{2} n(3n - 1)$.

(Wer möchte, kann sich zusätzlich auch einen Beweis ohne vollständige Induktion überlegen.)

(b) Verwenden Sie die Primfaktorzerlegung, um alle durch 6 teilbaren Zahlen $n \in \mathbb{N}$ zu bestimmen, die genau 6 Teiler besitzen. Machen Sie für alle Lösungen die Probe, indem Sie jeweils alle Teiler angeben.

H23 (a) Es bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen eines ebenen, konvexen n-Ecks. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ für $n \geq 3$ gilt. Finden Sie auch einen Beweis ohne vollständige Induktion?

(b) Wir betrachten die Fibonacci-Zahlen $F_n, n = 0, 1, \ldots$, die durch $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ und $F_0 = F_1 = 1$ rekursiv definiert sind. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass je zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen teilerfremd sind.

H24 (a) Geben Sie für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ die Primfaktorzerlegung der Zahl $n = 42^m$ an. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von m eine Formel für die Anzahl Teiler von n.

(b) Finden Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass die Zahlen $n+1$, $n+5$ und $n+15$ Primzahlen sind.