Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

5. Übungsblatt

für die Woche 18.11. - 24.11.2019

Euklidischer Algorithmus, Rechnen mod n

Ü25 (a) Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den $\mathrm{ggT}(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ für die folgenden Zahlenpaare:

(i) $n = 560, m = 127$ (ii) $n = 72, m = 330$ (iii) $n = 89, m = 55$.

Stellen Sie den $\mathrm{ggT}(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ in der Form $\mathrm{ggT}(m, n) = a \cdot n + b \cdot m$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar.

(b) Wir betrachten die durch $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $F_0 = F_1 = 1$ rekursiv definierten Fibonacci-Zahlen. Aus Übung 4, H23, ist bereits bekannt, dass $\mathrm{ggT}(F_{n+1}, F_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt:

$$1 = (-1)^n F_{n-2} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1} F_{n-1} \cdot F_n.$$

Ü26 (a) Gegeben sind die Zahlen $m_1 = 66$, $m_2 = 34$ und $m_3 = 11$. Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_{12}$:

$$m_1 \cdot m_2 + (m_3)^2, \quad m_3 - m_2 \text{ und } \quad m_2^{10}.$$

(b) Berechnen Sie $z = 47^{201} \bmod 11$ und die letzte Ziffer der Zahl 2^{1000}.

Ü27 (a) Beweisen Sie: Eine Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. (Analoges gilt für die Zahl 9.)

(b) Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und alle $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt:

$$m \cdot a \equiv m \cdot b \pmod{m \cdot n} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}.$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $a \in \mathbb{Z}_{28}$, so dass $14a \equiv 21 \pmod{28}$.

H28 $\boxed{\mathbf{A}}$

(a) Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus den $\mathrm{ggT}(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ für die Zahlenpaare

(i) $n = 187,\ m = 51$ (ii) $n = 1001,\ m = 90$,

und finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = a \cdot n + b \cdot m$.

(b) Berechnen Sie $3^{47} \pmod{91}$ mit der Methode “Multiplizieren & Quadrieren”. Zeigen Sie dabei detailliert Ihre Rechnungen mod 91.

H29 Zu zeigen ist, dass $n^5 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar ist. Beweisen Sie dies auf zwei Wegen, einerseits mit vollständiger Induktion, andererseits ohne Induktion durch Fallunterscheidung für n mod 5.

H30 (a) Beweisen Sie: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist (z.B. für 924 ist dies 9-2+4 = 11).

(b) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl n, die bei der Division durch 3 den Rest 1, bei Division durch 4 den Rest 2 und bei Division durch 5 den Rest 3 lässt. Verwenden Sie dazu den chinesischen Restsatz.