TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

7. Übungsblatt

für die Woche 02.12. - 08.12.2019

Gruppentheorie

Ü37 (a) Vervollständigen Sie die nebenstehende Tafel so, dass die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ mit der durch die Tafel definierten Operation $\circ$ eine Gruppe bildet (die Elemente sind natürlich paarweise verschieden).

Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Welche dieser Gruppen sind abelsch?

$\circ$	a	b	c	d
a	a			d
b		a		
c	c			
d				

(b) Ist eine der Gruppen aus (a) zu $(\mathbb{Z}_4; +)$ bzw. zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; +)$ mit der komponentenweisen Addition mod 2 isomorph?

Ü38 (a) Wie viele erzeugende Elemente gibt es in $(\mathbb{Z}_{13}; +)$, in $(\mathbb{Z}_{24}; +)$ bzw. in $(\mathbb{Z}_{450}; +)$?

(b) Wie viele erzeugende Elemente gibt es in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$ von $\mathbb{Z}_{13}$?

(c) Ist $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$ zyklisch? Ist $(\mathbb{Z}_{24}^*; \cdot)$ zyklisch?

(d) Wie viele Primitivwurzeln gibt es in $(\mathbb{Z}_{13}^*; \cdot)$? Bestimmen Sie eine Primitivwurzel, und verwenden Sie diese, um folgende Elemente $m_i \in \mathbb{Z}_{13}^*$, $i = 1, 2, 3$, zu berechnen:

$$m_1 = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12, \quad m_2 = 8^{-1}, \quad m_3 = 5^{10} \cdot 7^{-4}.$$

(e) Ist $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$ zu $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ isomorph?

Ü39 Betrachtet wird die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$ von $\mathbb{Z}_{14}$.

(a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel für $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$ auf. Geben Sie zu jedem Element sein Inverses an.

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}$ kann $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$ Untergruppen der Ordnung k besitzen?

(c) Finden Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$, und geben Sie deren Ordnung an.

(d) Wie viele Linksnebenklassen besitzen die nichttrivialen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$? Geben Sie alle Linksnebenklassen beider Untergruppen an.

H40 $\boxed{\textbf{A}}$ Es wird die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_{11}^*; \cdot)$ von $\mathbb{Z}_{11}$ betrachtet.

(a) Wie viele erzeugende Elemente besitzt $(\mathbb{Z}_{11}^*; \cdot)$?

(b) Untersuchen Sie, welche der Zahlen 2, 3, 4 und 7 Primitivwurzeln von $\mathbb{Z}_{11}^*$ sind?

(c) Verwenden Sie eine Primitivwurzel, um folgende Werte in $\mathbb{Z}_{11}^*$ zu berechnen:

$$z_1 = 8^5 \cdot 7^4 \cdot 6^3, \quad z_2 = 5^{2019} + 6^{-5}.$$

H41 Gegeben ist die Gruppe $G = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ mit der folgenden Verknüpfungstafel:

$\circ$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
s_2	s_2	s_3	s_1	s_6	s_4	s_5
s_3	s_3	s_1	s_2	s_5	s_6	s_4
s_4	s_4	s_5	s_6	s_1	s_2	s_3
s_5	s_5	s_6	s_4	s_3	s_1	s_2
s_6	s_6	s_4	s_5	s_2	s_3	s_1

(a) Welches ist das neutrale Element?

(b) Finden Sie alle Untergruppen von G und geben Sie deren Ordnung an. Begründen Sie, dass es keine weiteren gibt.

(c) Ermitteln für alle nichttrivialen Untergruppen jeweils alle ihre Linksnebenklassen in G.

(d) Ist $(G; \circ)$ abelsch? Ist $(G; \circ)$ zyklisch?

(e) Ist $(G; \circ)$ zu $(\mathbb{Z}_{14}^*; \cdot)$ isomorph?

H42 Es wird die Diedergruppe D_5, d.h. die Gruppe aller Symmetrieabbildungen eines regelmäßigen Fünfecks, betrachtet. Die Eckpunkte des Fünfecks seien mit den Zahlen 1 bis 5 fortlaufend beschriftet.

(a) Geben Sie alle Elemente der Diedergruppe D_5 durch Permutationen in Zyklenschreibweise an.

(b) Welche Ordnungen können die Untergruppen von D_5 besitzen? Bestimmen Sie alle Untergruppen, die von genau einem Element ertzeugt werden und geben sie deren Ordnung an.

(c) Ist D_5 zyklisch?