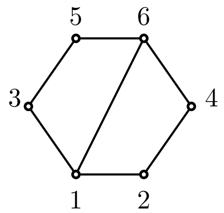
Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

9. Übungsblatt

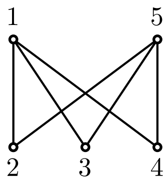
für die Woche 16.12. - 22.12.2019

Graphentheorie

Ü49 (a) Gegeben sind Graphen G_1 und G_2 durch die Diagramme:



G_1



G_2

(1) Zeichnen Sie je ein Diagramm der Komplemente der Graphen G_1 und G_2.

(2) Bestimmen Sie für beide Graphen jeweils alle Pfade vom Knoten 2 zum Knoten 5, sowie einen Streckenzug zwischen diesen Knoten, der kein Pfad ist.

(b) Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$, sei $M_n := \{1, 2, \ldots, 2n\}$ und $G_n := (V_n, E_n)$ der Graph definiert durch

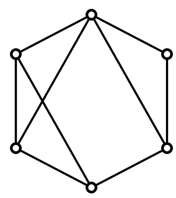
$$V_n := \big\{A \subseteq M_n \mid |A| = n\big\},$$
$$E_n := \big\{\{A, B\} \mid A, B \in V_n, |A \cap B| = n - 1\big\}.$$

(1) Geben Sie für die Graphen G_1 und G_2 die Knotenmenge an, und zeichnen Sie je ein Graphendiagramm. Ist G_2 bipartit?

(2) Bestimmen Sie die Anzahl der Knoten des Graphen G_n in Abhängigkeit von n.

Ü50 (a) Geben Sie bis auf Isomorphie alle möglichen Diagramme von Bäumen $T = (V, E)$ an, für die $|V| + |E| = 9$ gilt.

(b) Geben Sie für den (unbenannten) Graphen G, der durch das nebenstehende Diagramm definiert ist, alle verschiedenen unbenannten Bäume mit 6 Knoten an, die Subgraphen von G sind, indem Sie jeweils ein Diagramm zeichnen.



Ü51 (a) Zeichnen Sie zur nebenstehenden Karte von Zentraleuropa ein Diagramm des zugehörigen Graphen, dessen Knoten die Länder der Karte sind und für den zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn die zugehörigen Länder aneinander grenzen.

(b) Wie viele Farben werden mindestens benötigt, um die Karte so zu färben, dass je zwei aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben haben?

Zentraleuropa

H52 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Von einem Graphen $G = (V, E)$ ist bekannt, dass er genau 20 Knoten besitzt, und sein Komplement $\overline{G}$ ein Baum ist. Berechnen Sie die Anzahl Kanten von G.

(b) Es wird der Graph $G_n := (V_n, E_n)$ betrachtet, der durch

$$V_n := \big\{A \subseteq \{1, \ldots n\} \mid |A| \in \{1, n-1\}\big\},$$
$$E_n := \big\{\{A, B\} \mid A, B \in V_n, A \neq B, A \subseteq B\big\}.$$

definiert ist.

(1) Geben Sie für die Graphen G_3 und G_4 jeweils die Knotenmenge an, und zeichnen Sie je ein Graphendiagramm.

(2) Berechnen Sie die Anzahl der Knoten des Graphen G_n in Abhängigkeit von n.

H53 (a) Geben Sie bis auf Isomorphie alle unbenannten zusammenhängenden Graphen mit 4 Knoten jeweils durch ein Diagramm an.

(b) Beweisen Sie, dass es keinen selbstkomplementären Graphen mit 6 Knoten gibt.

H54 Eine Volkshochschule bietet von Dienstag bis Freitag Kurse für Kochen, Zeichnen, Klöppeln, Mathematik, Englisch, Französisch und Spanisch an. Jeder Kurs wird genau an einem der Tage angeboten und dauert den ganzen Abend. Es gibt drei Lehrer: einen für Mathematik und Kochen, einen für Zeichnen und Klöppeln, und der dritte unterrichtet die Fremdsprachen. Manche Kursteilnehmer wollen zwei Fächer belegen. So gibt es Teilnehmer, die Mathematik mit Klöppeln kombinieren wollen. Weiterhin gibt es bei jeder Sprache Kursteilnehmer, die auch Mathematik oder Zeichnen belegen möchten, und es gibt solche, die neben Kochen auch Klöppeln, Zeichnen oder Englisch lernen wollen. Andere Kombinationen kommen nicht vor.

(a) Beschreiben Sie die Beziehungen anhand eines Graphen mit Knotenmenge V bestehend aus allen Kursfächern. Die Kantenmenge E sei durch alle Paare von Kursen gegeben, die nicht gleichzeitig angeboten werden können. Zeichnen Sie ein Diagramm dieses Graphen.

(b) Gelingt es, die sieben Kurse so an vier Tagen zu unterrichten, dass alle Kursteilnehmer, die zwei Kurse belegen wollen, dies auch können?
Hinweis: Färben Sie die Knoten des Graphen geeignet!