TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fachrichtung Mathematik • Institut für Algebra • Prof. Bodirsky, Dr. Noack

Einführung in die Mathematik für Informatiker: Diskrete Strukturen INF 110
Wintersemester 2019/20

12. Übungsblatt

für die Woche 20.01. - 26.01.2020

Relationen

Ü67 (a) Auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ist folgende Relation gegeben:

$$\begin{aligned} R \quad = \quad & \{(a,a) \mid a \in A\} \cup \{(1,9),(2,4),(2,5),(2,7),(3,6),(4,2),(4,5),(4,7), \\ & (5,2),(5,4),(5,7),(6,3),(7,2),(7,4),(7,5),(9,1)\}\,. \end{aligned}$$

(1) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

(2) Stellen Sie die Relation durch einen geeigneten ungerichteten Graphen dar.

(b) Untersuchen Sie, für die folgenden Relationen R auf den Mengen A, ob sie Äquivalenzrelationen sind, und geben Sie ggf. die Äquivalenzklassen an.

(1) $A = \mathbb{C}\backslash\{0\}, \quad R = \big\{(z_1, z_2) \in A \times A \;\big|\; z_1 \cdot \overline{z}_2 \in \mathbb{R}\big\}$,

(2) Es sei A die Menge aller Felder eines Schachbretts. Für beliebige zwei Felder u und v ist $(u, v) \in R$, falls ein Läufer von Feld u mit einem oder mehreren Zügen auf Feld v gelangen kann.

Ü68 (a) Auf der Menge $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13\}$ wird die Teilbarkeitsrelation $\mid$ betrachtet.

(1) Geben Sie die Relation als Menge konkreter Paare an.

(2) Zeigen Sie, dass $\mid$ eine partielle Ordnung auf A ist. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm.

(3) Bestimmen Sie alle minimalen Elemente von A bzgl. $\mid$. Gibt es ein kleinstes?

(4) Geben Sie für A eine größte Antikette und eine minimale Partition in Ketten bzgl. $\mid$ an.

(b) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Teilbarkeitsrelation auf den Teilern der Zahl 280.

(c) Auf der Menge $A = \{1, 2, \cdots, 8\}$ wird die Relation $R = \{(x, y) \mid x \bmod y = 2 \text{ und } |x - y| > 1\}$ betrachtet.

(1) Geben Sie R als Menge konkreter Paare an.

(2) Kann man eine partielle Ordnung finden, die R enthält?
Bestimmen Sie gegebenenfalls die kleinste partielle Ordnung T, die R enthält, und zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von T. Erweitern Sie T zu einer linearen Ordnung.

Ü69 Für eine endliche Menge $A \neq \emptyset$ und eine Abbildung $f : A \to A$ wird die Relation

$$R_f = \{(a, b) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \; b = f^n(a)\}$$

betrachtet. (Dabei ist f^n die n-malige Hintereinanderausführung von f, $f^0 = \mathrm{id}$.)

(a) Zeigen Sie, dass R_f eine Quasiordnung ist.

(b) Zeigen Sie, dass R_f genau dann eine partielle Ordnung ist, wenn kein Zyklus der Länge ≥ 2 in R_f existiert, d.h. keine Folge $(a_1, a_2), \ldots, (a_k, a_1)$ mit $a_1 \neq a_2$.

(c) Untersuchen Sie, ob R_f für $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, f(a) := a^2 + 1 \pmod 5$ eine partielle Ordnung ist.

H70 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Untersuchen Sie für die Relation

$$R := \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \ |a-b| < 2\},$$

welche der Eigenschaften *reflexiv*, *irreflexiv*, *symmetrisch*, *antisymmetrisch* und *transitiv* sie erfüllt (für jede der Eigenschaften durch Beweis oder Gegenbeispiel). Ist R eine Äquivalenzrelation?

(b) Für eine Menge $M \neq \emptyset$ sei $A = \mathcal{P}(M)$. Zeigen Sie, dass die Relation

$$R_M := \{(X,Y) \in A \times A \,|\, X \subseteq Y\}$$

eine partielle Ordnungsrelation ist.
Zeichnen Sie für die Menge $M := \{a,b,c\}$ das Hasse-Diagramm von R_M.

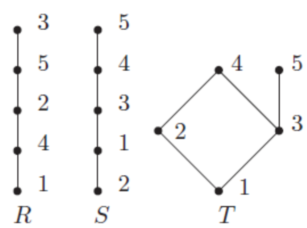
H71 $\boxed{\textbf{A}}$

(a) Welche der Eigenschaften *reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch* bzw. *transitiv* besitzen folgende Relationen R auf der jeweiligen Menge A? Begründen Sie Ihre Entscheidungen (Gegenbeispiel oder Beweis)! Handelt es sich bei R um eine Äquivalenzrelation, so geben Sie alle Äquivalenzklassen an.

(1) $A = \{3,4,5,6,8,10,12,15\}$, $\quad R = \{(a,b) \mid \mathrm{ggT}(a,b) > 1\}$,
(2) $A = \mathbb{R}^2$, $\quad R = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a-c = b-d\}$.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl surjektiver Abbildungen $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3\}$ mithilfe der Stirlingzahlen 2. Art. (Es wird eine detaillierte Berechung anhand der Rekursionsformel erwartet.)

H72 (a) Nebenstehend sind Diagramme dreier Ordnungsrelationen R, S und T auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5\}$ gezeichnet.



(1) Geben Sie $R \cap S$ und $T \circ S$ jeweils als Menge von Paaren an. Welche der Relationen sind linear?

(2) Ist $R \cap S$ eine partielle Ordnung? Ist sie linear?

(3) Ist $T \circ S$ eine partielle Ordnung?

(b) Es ist auf der Menge $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ folgende Relation gegeben:

$$R = \left\{(x,y) \,\middle|\, x < y,\ \mathrm{ggT}(x,y) > 1\right\}.$$

(1) Geben Sie die Relationen R, R^2 und R^3 jeweils als Menge von Paaren an.

(2) Warum läßt sich R zu einer Ordnungsrelation erweitern? Bestimmen Sie die kleinste Ordnungsrelation T, die R enthält, und zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm für T.