

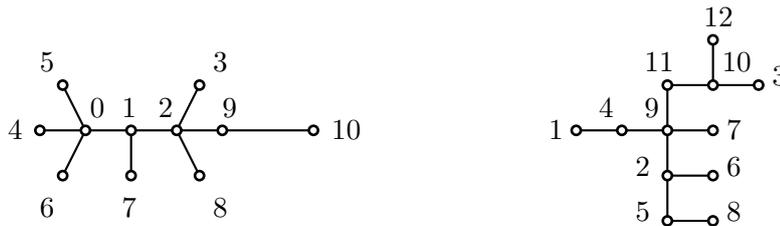
13. Übungsblatt

für die Woche 27.01.-02.02.2020

Bäume, Prüfercode

Ü73 Geben Sie alle unbenannten Bäume mit genau 6 Knoten durch jeweils ein zugehöriges Diagramm an. Ermitteln Sie zu jedem dieser unbenannten Bäume die Anzahl verschiedener benannter Bäume für die Knotenmenge  $V = \{1, \dots, 6\}$ . Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Gesamtzahl aller möglichen benannten Bäume für die gegebene Knotenmenge  $V$  berechnen.

Ü74 (a) Bestimmen Sie den Prüfercode folgender Bäume



(b) Welche Blätter hat der Baum  $T$  mit Knotenmenge  $V = \{0, 1, \dots, 8\}$  und Prüfercode  $(3, 2, 1, 3, 2, 2, 1)$ ? Bestimmen Sie alle Kanten von  $T$ , und zeichnen Sie ein Diagramm dieses Baumes.

(c) Wie sieht ein Baum mit Knotenmenge  $V = \{0, 1, \dots, 8\}$  und Prüfercode  $(a, b, a, b, a, b, a)$  mit  $a, b \in V$  aus?

Ü75 Betrachtet werden die zwei Graphen mit den folgenden Adjazenzmatrizen:

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (ii) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie jeweils anhand des Handschlaglemmas die Anzahl Kanten. Nutzen Sie das Ergebnis, um zu entscheiden, ob der Graph ein Baum sein *kann*.

(b) Zeichnen Sie für beide Graphen je ein Diagramm.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl aller Spannbäume der Graphen aus (i) bzw. (ii) einerseits mittels des Satzes von Kirchhoff, andererseits direkt anhand des Diagramms.

- H76 (a) Ein Baum  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge  $V = \{0, 1, \dots, 8\}$  ist durch den Prüfercode  $(2, 8, 1, 0, 0, 4, 2)$  gegeben.
- (1) Bestimmen Sie aus dem Prüfercode, welche Knoten Blätter des Baumes sind.
  - (2) Zeichnen Sie ein Diagramm des Baumes  $G$ .
  - (3) Wie ändert sich der Prüfercode, wenn der Baum durch den Knoten 9 und die Kante  $\{0, 9\}$  erweitert wird?
- (b) Wie viele Bäume gibt es auf der Knotenmenge  $V = \{0, 1, \dots, 7\}$ ?
- (c) Gesucht ist die Anzahl aller Bäume mit Knotenmenge  $V = \{0, 1, \dots, 9\}$ , in denen jeder Knoten ungeraden Grad hat. Ermitteln Sie diese Anzahl.  
(Hinweis: Es genügt, sich alle solchen unbenannten Bäume (Isomorphieklassen) zu überlegen, und dafür dann die möglichen Zuordnungen der Zahlen  $\{0, 1, \dots, 9\}$  zu den Knoten zu zählen).

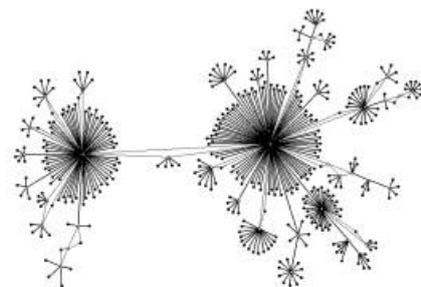
H77 Es sei  $G$  der Graph mit Knotenmenge  $V = \{a, b, c, d\}$  und Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeichnen Sie ein Diagramm des Graphen  $G$ .
- (b) Berechnen Sie die Anzahl aller Spannbäume des Graphen  $G$  mittels des Satzes von Kirchhoff. Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume von  $G$  alternativ aus Überlegungen anhand des Diagramms von  $G$  (Ein Weg wäre, alle Spannbäume zu zeichnen, dies ist aber nicht notwendig.)

H78 Einen zusammenhängenden Graphen, in dem jede Kante in *höchstens* einem Kreis liegt, nennt man auch einen *Kaktus*.

Welche Kakteen mit 10 Knoten haben eine maximale Anzahl von Spannbäumen, und wie viele solche Bäume haben sie?



Beispiel eines Kaktus mit mehr als 10 Knoten