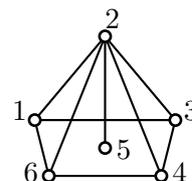


14. Übungsblatt

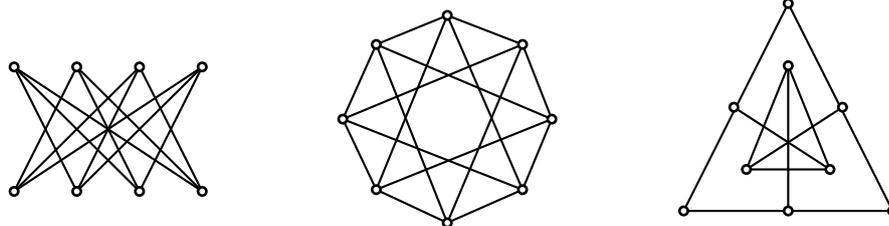
für die Woche 03.02. - 09.02.2020

Planare Graphen

- Ü79 (a) Stellen Sie für den durch das nebenstehende Diagramm gegebenen Graphen $G = (V, E)$ die Adjazenzmatrix und die Gradmatrix auf. Zeigen Sie, dass der Graph planar ist, und bestimmen Sie die Anzahl Flächen, die jede Zeichnung von G haben muss. Gibt es für G zwei Zeichnungen, die nicht zueinander kombinatorisch isomorph sind?



- (b) Für welche $n \in \mathbb{N}, n > 0$, ist der Graph K_n planar?
(c) Sind die durch die folgenden Diagramme gegebenen Graphen planar?



- Ü80 Die Oberfläche eines Fußballs ist aus Fünfecken und Sechsecken zusammengesetzt, sie kann durch einen ebenen Graphen (V, E) mit 60 Knoten dargestellt werden, in dem sich in jedem Knoten genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck treffen.

- (a) Berechnen Sie die Kantenanzahl des ebenen Graphen (V, E) und bestimmen Sie die Anzahl der Fünfeckflächen und der Sechseckflächen dieses Graphen.
(b) Ist es möglich, einen Fußball zu schaffen, dessen Oberfläche nur aus Fünfecken bzw. nur aus Sechsecken besteht, wenn in jeder Ecke genau drei Flächen zusammentreffen sollen?

- Ü81 (a) Ermitteln Sie, wie viele Flächen ein planarer Graph $G = (V, E)$ haben kann, wenn $|V| = 10$ ist und alle Knoten den Grad 3 haben.
(b) Ist der Graph $G = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E)$ mit

$$E := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{4, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$$

planar? Gibt es ein beschränktes 3-dimensionales Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass G der Kantengraph von P ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

H82 (a) Wie viele Knoten muss ein 4-fach zusammenhängender, planarer Graph mindestens besitzen? Geben Sie einen solchen mit minimaler Knotenanzahl durch eine Zeichnung an.

(b) Es sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit n Knoten und m Kanten. Zeigen Sie, dass für $n \geq 11$ das Komplement \overline{G} nicht planar ist.

(Hinweis: Es lässt sich hier sehr gut Korollar 111 des Kapitels Planare Graphen verwenden.)

H83 (a) Geben Sie einen maximalen planaren Graphen mit 5 Knoten an, und begründen Sie, dass Ihr Graph die geforderten Eigenschaften besitzt.

(b) Zeigen Sie: Ein maximaler planarer Graph mit mindestens drei Knoten ist zweifach zusammenhängend.

H84 Aus einem gewöhnlichen Würfel konstruiere man einen Graphen wie folgt: Die Knoten des Graphen seien die Flächen des Würfels. Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, falls die zugehörigen Würfelflächen zwei Würfecken gemeinsam haben.

Zeichnen Sie ein ebenes Diagramm dieses Graphen. Wieviele Flächen hat es?